บทที่ 6
ลิมิต
(Limits)

แนวคิดของกระบวนการลิมิตเริ่มปรากฏในปี ค.ศ. 1680 โดย เซอร์ไอแซก นิวตัน และกอทท์ฟรีด วิลเฮล์ม ไลบ์นิทซ์ เนื่องมาจากการกำเนิดขึ้นของแคลคูลัส ทั้งสองต้องการเพื่อกำหนดแนวคิดของฟังก์ชันและแนวคิดของขนาดมากน้อย " ใกล้ชิด " ของสิ่ง ๆ หนึ่ง ในปี ค.ศ. 1748 เลออนฮาร์ด ออยเลอร์ ได้อธิบายแนวคิดของลิมิต แต่ยังไม่รอบคอบ นำไปสู่จำนวนที่เป็นปัญหาเกี่ยวกับลักษณะแนวคิดลิมิต ในปี ค.ศ. 1821 ไอกูสแตง ลุย โคชี ได้ให้นิยามและอ้างเหตุผลด้วยความระมัดระวังมากกว่าคนก่อน แต่แนวคิดของลิมิตยังคงยากที่จะอธิบายให้เข้าใจ ต่อมามีการกำหนดนิยามของลิมิตที่กระชับขึ้น โดย คาร์ล ไวแยร์สตราสส์ ซึ่งนิยามลิมิตดังกล่าวเป็นส่วนหนึ่งที่ใช้ในปัจจุบัน

สำหรับเนื้อหาในบทนี้ จะกล่าวถึงลิมิตของฟังก์ชัน ทฤษฎีบทลิมิต และสุดท้ายจะเป็นภาคขยายบางอย่างของแนวคิดลิมิต

6.1 ลิมิตของฟังก์ชัน (Limits of Function)

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงแนวคิดเบื้องต้นที่สำคัญของลิมิตฟังก์ชัน โดยแนวคิดของฟังก์ชัน f มีลิมิต L ที่จุด c จะเป็นค่า $f(x)$ ที่ใกล้ชิดกับ L เมื่อ x ใกล้ชิดกับ c

ในการพิจารณาสำหรับแนวคิดของลิมิตฟังก์ชัน f ที่จุด c มีความจำเป็นที่ f จะนิยามที่จุดใกล้ c ไม่จำเป็นนิยามที่จุด c แต่ควรจะนิยามที่จุดใกล้ชิดเพียงพอกับ c

6.1.1 ทบทวนความหมายและทฤษฎีบทเกี่ยวกับจุดลิมิต

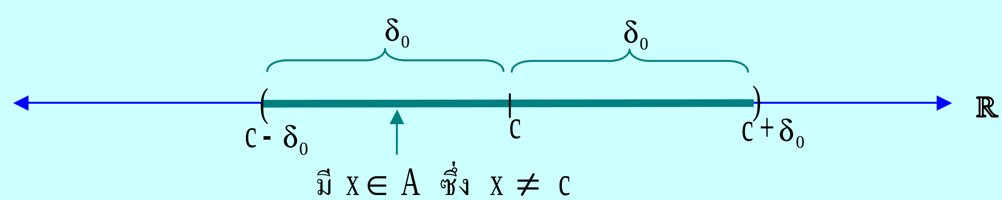
จากนิยามของจุดลิมิต (บทนิยาม 3.2.2) " สำหรับ $A \subseteq \mathbb{R}$ และ $c \in \mathbb{R}$ c เป็นจุดลิมิตของ A ก็ต่อเมื่อ แต่ละย่านใกล้เคียง V ของ c จะสอดคล้องกับ $(V \setminus \{c\}) \cap A \neq \phi$" อาจจะกล่าวดังบทนิยาม 6.1.1 ต่อไปนี้

บทนิยาม 6.1.1 สำหรับ $A \subseteq \mathbb{R}$ และ $c \in \mathbb{R}$

c เป็นจุดลิมิตของ A ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $\delta > 0$ จะมี $x \in A$ ซึ่ง $x \neq c$ ที่ทำให้ $|x - c| < \delta$

บทนิยาม 6.1.1 กล่าวเป็นความหมายของย่านใกล้เคียงดังนี้

" c เป็นจุดลิมิตของ A ก็ต่อเมื่อ แต่ละ δ - ย่านใกล้เคียง $V_\delta(c) = (c - \delta, c + \delta)$ ของ c จะมีสมาชิกอย่างน้อยหนึ่งจุดของ A ที่แตกต่างจาก c " เลือก $\delta = \delta_0 > 0$ เขียนกราฟได้ดังนี้



รูปที่ 6.1.1 : c **เป็นจุดลิมิตของ** A

หมายเหตุ 6.1.1 จุด c อาจจะเป็น หรือไม่เป็นสมาชิกของ A อย่างไรก็ตามถึงแม้ว่า ถ้า c อยู่ใน A ก็ยังละเลยเมื่อกำลังตัดสินว่า c เป็นจุดลิมิตของ A หรือไม่ เนื่องจากในการพิจารณา c เป็นจุดลิมิตของ A จะต้องทราบว่า มีจุดใน $V_\delta(c) \cap A$ แตกต่างจาก c สำหรับตัวอย่าง ถ้า $A = \{1, 2\}$ ดังนั้น จุด 1 ไม่เป็นจุดลิมิตของ A เนื่องจากเลือก $\delta = \frac{1}{2}$ ทำให้ย่านใกล้เคียงของ 1 ไม่มีสมาชิกอยู่ใน A ที่แตกต่างจาก 1 เช่นเดียวกันสำหรับจุด 2 ดังนั้น A ไม่มีจุดลิมิต

ทฤษฎีบท 6.1.1 ให้ $A \subseteq \mathbb{R}$ และ $c \in \mathbb{R}$

c เป็นจุดลิมิตของ A ก็ต่อเมื่อ มีลำดับ (a_n) ใน A ที่ทำให้ $\lim(a_n) = c$ และ

$a_n \neq c$ ทุก $n \in \mathbb{N}$

พิสูจน์ $(\Rightarrow)$ ถ้า c เป็นจุดลิมิตของ A ดังนั้น สำหรับ n ใด ๆ ซึ่ง $n \in \mathbb{N}$

$(\frac{1}{n})$ - ย่านใกล้เคียง $V_{\frac{1}{n}}(c)$ จะมีอย่างน้อยหนึ่งจุด a_n ใน A ที่แตกต่างจาก c

ที่ทำให้ $|a_n - c| < \frac{1}{n}$

จะได้ว่า $\lim(a_n) = c$

$(\Leftarrow)$ ถ้ามีลำดับ (a_n) ใน $A\backslash\{c\}$ ซึ่ง $\lim(a_n) = c$

ดังนั้น สำหรับ δ ใด ๆ ซึ่ง $\delta > 0$ จะมีจำนวนธรรมชาติ K ที่ทำให้

สำหรับทุกจำนวนธรรมชาติ n ถ้า $n \geq K$ แล้ว $a_n \in V_\delta(c)$

นั่นคือ δ - ย่านใกล้เคียง $V_\delta(c)$ ของ c มี a_n เป็นสมาชิก สำหรับทุก $n \geq K$

ซึ่งอยู่ใน A และแตกต่างจาก c

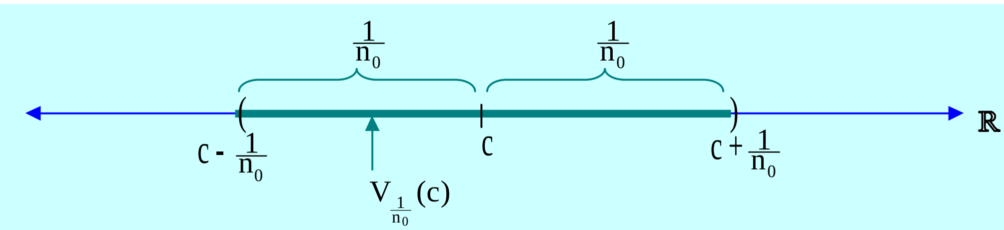
เพราะฉะนั้น c เป็นจุดลิมิตของ A

#

อธิบายแนวคิดทฤษฎีบท 6.1.1 **ประกอบรูปกราฟ**

$(\Rightarrow)$ ให้ $c \in \mathbb{R}$ ซึ่ง c เป็นจุดลิมิตของ $A \subseteq \mathbb{R}$ สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$ โดยที่ $\frac{1}{n} > 0$

เลือก $n = n_0$ เขียนรูปกราฟดังนี้



รูปที่ 6.1.2 : c **เป็นจุดลิมิตของ** A

จะได้ว่า

(1) จะมี $a_n \in A$ ซึ่ง $a_n \neq c$ โดยที่ $a_n \in V_{\frac{1}{n_0}}(c)$

(2) จาก (1) จะได้ว่า $|a_n - c| < \frac{1}{n_0}$

เนื่องจาก n_0 เป็นการเลือกใด ๆ ดังนั้น แต่ละ n จะเขียนกราฟได้ในทำนองเดียวกัน

จะได้ว่า แต่ละ $n \in \mathbb{N}$ โดยที่ $\frac{1}{n} > 0$ จะมี $a_n \in A, a_n \neq c$ ที่ทำให้

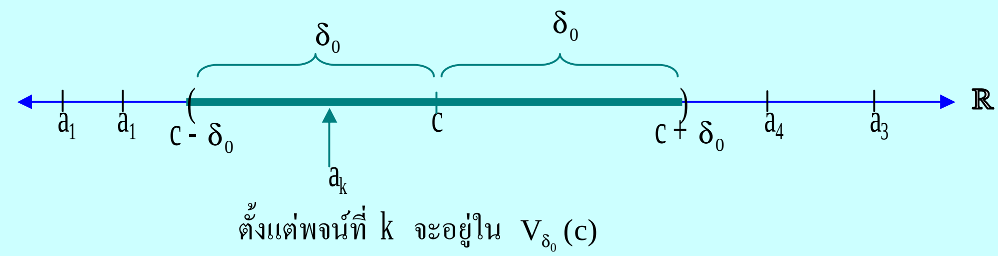
$|a_n - c| < \frac{1}{n}$ ดังนั้น $\lim(a_n) = c$

($\Leftarrow$) ให้ $\lim(a_n) = c$ ซึ่ง $a_n \neq c$ ทุก $n \in \mathbb{N}$

สำหรับแต่ละ $\delta > 0$ จะมี $k \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้สำหรับทุกจำนวนธรรมชาติ n

ถ้า $n \geq k$ แล้ว $a_n \in V_\delta(c)$

เลือก $\delta = \delta_0 > 0$ เขียนรูปกราฟดังนี้



รูปที่ 6.1.3 : $\lim a_n = c, a_n \neq c$

สำหรับ $a_n \neq c$ ทุก $n \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า $|a_n - c| < \delta_0$

เนื่องจาก δ_0 เป็นการเลือกใด ๆ

ดังนั้น แต่ละ $\delta > 0$ จะเขียนกราฟได้ในทำนองเดียวกัน

จะได้ว่า แต่ละ $\delta > 0$ จะมี $a_n \in A$ ซึ่ง $a_n \neq c$ ที่ทำให้ $|a_n - c| < \delta$

เพราะนั้น c เป็นจุดลิมิตของ A

#

ตัวอย่างต่อไปจะเน้นจุดลิมิตของเซตที่อาจจะอยู่หรือไม่อยู่ในเซต

ตัวอย่าง 6.1.1 จงพิจารณาจุดลิมิตของเซตแต่ละข้อต่อไปนี้

1. สำหรับช่วงเปิด $A_1 = (0, 1)$

   ทุก ๆ จุดของช่วงปิด $[0, 1]$ เป็นจุดลิมิตของ A_1

   จะเห็นว่า จุด $0, 1$ เป็นจุดลิมิตของ A_1 แต่ไม่อยู่ใน A_1

   และทุกจุดของ A_1 เป็นจุดลิมิตของ A_1

2. เซตจำกัด ไม่มีจุดลิมิต

3. เซตอนันต์ $\mathbb{N}$ ไม่มีจุดลิมิต

4. $A_4 = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ มีเพียงจุด 0 เป็นจุดลิมิต ไม่มีจุดใน A_4 เป็นจุดลิมิตของ A_4

5. ถ้า $I = [0,1]$ แล้ว $A_5 = I \cap \mathbb{Q}$ ประกอบด้วยจำนวนตรรกยะทั้งหมดใน I
จากทฤษฎีบทความหนาแน่นของจำนวนอตรรกยะใน $\mathbb{R}$
จะได้ว่า ทุกจุดใน I เป็นจุดลิมิตของ A_5

#

6.1.2 ความหมายและทฤษฎีบทเบื้องต้นลิมิตฟังก์ชัน

ขณะนี้จะนิยามลิมิตฟังก์ชัน f ที่จุด c สิ่งสำคัญที่อธิบายในบทนิยามนี้ คือ ไม่จำเป็นที่ f จะนิยามที่ c

บทนิยาม 6.1.2 สำหรับ $A \subseteq \mathbb{R}$ และ $L \in \mathbb{R}$ ให้ c เป็นจุดลิมิตของ A และ $f : A \to \mathbb{R}$
L เป็นลิมิต (limit) ของ f ที่ c ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ที่ทำให้
สำหรับทุก $x \in A$ ถ้า $0 < |x - c| < \delta$ แล้ว $|f(x) - L| < \varepsilon$

หมายเหตุ 6.1.2

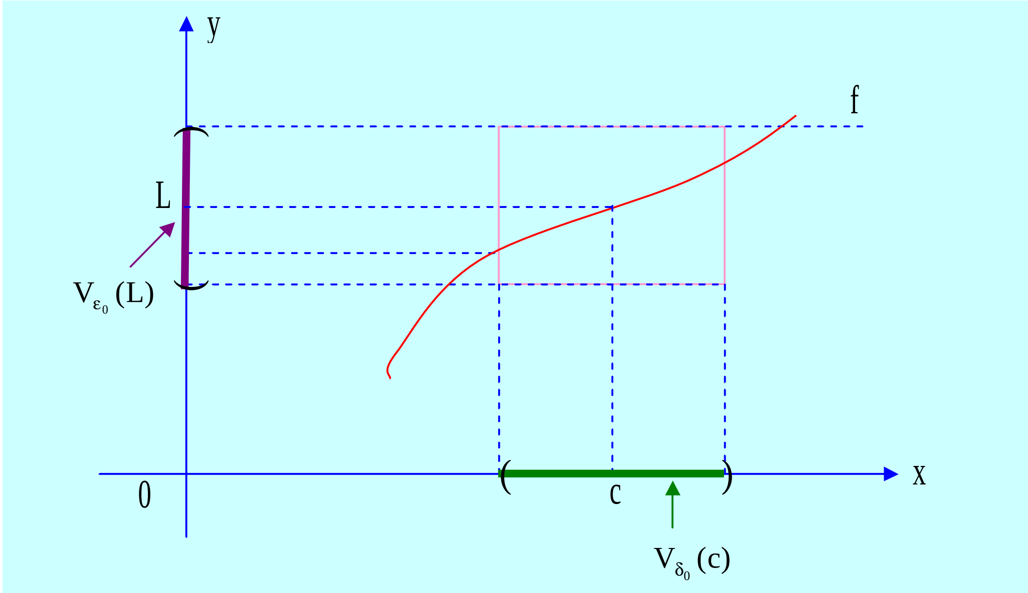
(1) เนื่องจากค่าของ δ ปกติขึ้นกับ ε ในบางครั้งจะเขียน $\delta(\varepsilon)$ แทนที่ δ เพื่อเน้นว่าขึ้นอยู่กับ ε

(2) อสมการ $0 < |x - c|$ สมมูลกับคำกล่าวว่า $x \neq c$

(3) ถ้า L เป็นลิมิตของ f ที่ c ดังนั้น จะกล่าวว่า f ลู่เข้าสู่ L ที่ c
จะเขียน $L = \lim\limits_{x \to c} f(x)$ หรือ $L = \lim\limits_{x \to c} f$
เหมือนกันกับคำกล่าวที่ว่า “ $f(x)$ เข้าสู่ L ขณะที่ x เข้าสู่ c ”
เขียนแทนด้วย $f(x) \to L$ ขณะที่ $x \to c$

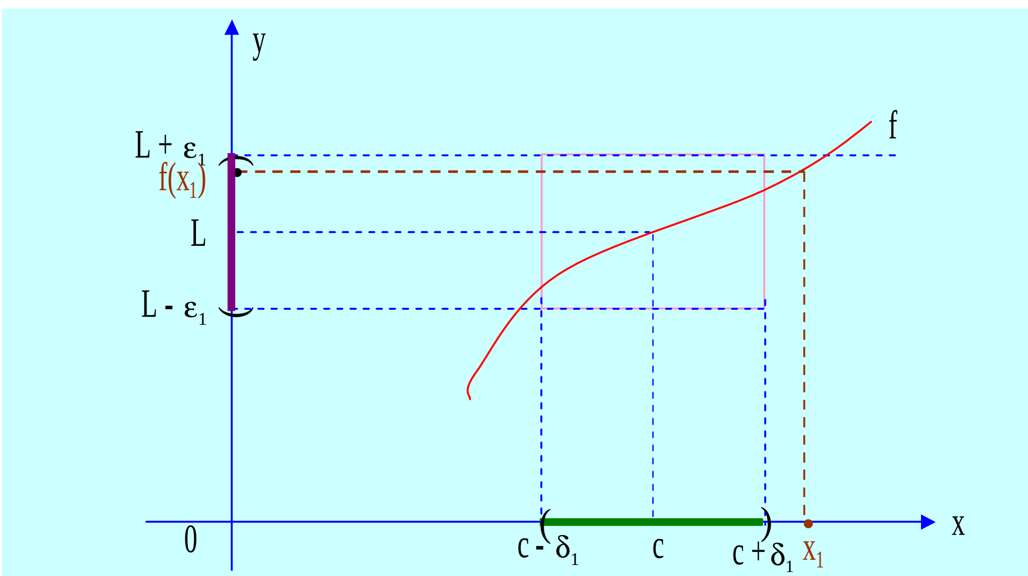
ข้อตกลง ลักษณะรูปกราฟ f ที่จะใช้ประกอบการอธิบายต่อไปจะเป็นรูปที่สมมุติขึ้นเพื่อจำลองแทนกราฟ f เท่านั้น (โดยข้อเท็จจริง รูปกราฟ f ขึ้นอยู่กับการนิยามฟังก์ชันนั้น ๆ) อย่างไรก็ตามไม่ว่า f จะนิยามอย่างไร จะสนใจโดเมน A ที่เป็นย่านใกล้เคียงของจุดลิมิต c โดยที่จุด c ฟังก์ชันอาจจะนิยามหรือไม่ก็ได้

บทนิยามลิมิตของฟังก์ชันสามารถอธิบายได้เป็นอย่างดีในเทอมของย่านใกล้เคียง ถ้าเลือก $\varepsilon = \varepsilon_0$ และมี $\delta = \delta_0 > 0$ ตามบทนิยาม 6.1.2 เขียนกราฟได้ดังรูปที่ 6.1.4



รูปที่ 6.1.4 : **ลิมิตของ** f **ที่** c **คือ** L

เนื่องจาก $V_\delta(c) = (c-\delta, c+\delta) = \{x \mid |x-c| < \delta\}$ อสมการ $0 < |x-c| < \delta$ สมมูลกับคำกล่าวที่ว่า $x \neq c$ และ x อยู่ใน δ - ย่านใกล้เคียง $V_\delta(c)$ ของ c ในทำนองเดียวกัน อสมการ $|f(x)-L| < \varepsilon$ สมมูลกับคำกล่าวที่ว่า $f(x)$ อยู่ใน ε - ย่านใกล้เคียง $V_\varepsilon(L)$ ของ L และจากเงื่อนไขของย่านใกล้เคียงของบทนิยามลิมิต จะได้ว่า ถ้า $x \in (c-\delta, c+\delta)$ แล้ว $f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ อย่างไรก็ตาม $f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ ไม่จำเป็นที่ $x \in (c-\delta, c+\delta)$ ถ้าเลือก $\varepsilon = \varepsilon_1$ และมี $\delta = \delta_1$ ตามบทนิยาม 6.1.2 เขียนกราฟได้ดังรูปที่ 6.1.5

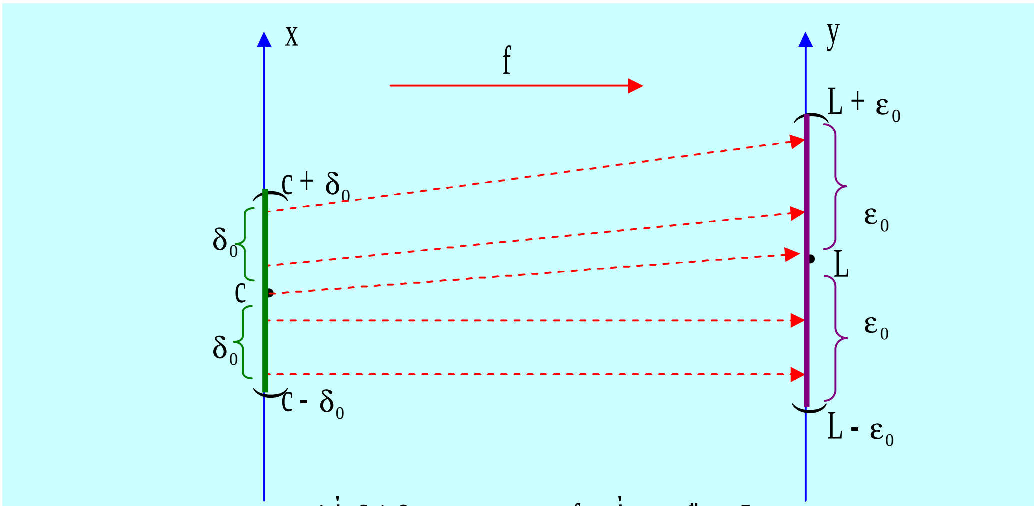


รูปที่ 6.1.5 : $f(x_1)$ Î $(L-\varepsilon_1, L+\varepsilon_1)$ **แต่** x_1 Ï $(c-\delta_1, c+\delta_1)$

หมายเหตุ 6.1.3

จากรูปที่ 6.1.4 กราฟของ f มีลักษณะหลายรูปแบบขึ้นอยู่กับการกำหนดฟังก์ชัน ไม่จำเป็นจะต้องเป็นลักษณะดังกล่าว ในบางครั้งการเขียนรูปจึงเขียนเฉพาะ ลักษณะการจับคู่บนช่วงย่านใกล้เคียง ดังรูปที่ 6.1.6

ถ้าเลือก $\varepsilon = \varepsilon_0$ และมี $\delta = \delta_0$ ตามบทนิยาม 6.1.2 เขียนกราฟได้ดังนี้



รูปที่ 6.1.6 : ลิมิตของ f ที่ c คือ L

แต่อย่างไรก็ตามทุกรูปแบบของกราฟ การพิจารณาลิมิตของ f ที่ c สามารถทำได้ในทำนองเดียวกัน เพื่อความสะดวกและให้เห็นรูปแบบฟังก์ชันชัดเจน ในการพิจารณากราฟเมื่อกล่าวถึงฟังก์ชันใด ๆ ในที่นี้จะกำหนดให้รูปกราฟ f เป็นลักษณะดังรูปที่ 6.1.4

ถ้าลิมิตของ f ที่ c ไม่มีค่า จะกล่าวว่า f ลู่ออกที่ c อย่างไรก็ตาม สำหรับลิมิตของ f ที่ c มีค่า ค่า L ของลิมิตมีเพียงค่าเดียว ความเป็นอย่างเดียวนี้ ไม่เป็นส่วนประกอบของบทนิยามลิมิต แต่จะพิจารณาเป็นทฤษฎีบทโดยเฉพาะ

ทฤษฎีบท 6.1.2 ถ้า $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ และ c เป็นจุดลิมิตของ A แล้ว f มีลิมิตที่ c เพียงค่าเดียว

พิสูจน์ สมมุติให้ จำนวน L และ L' สอดคล้องกับบทนิยาม 6.1.2

สำหรับ ε ใด ๆ ซึ่ง $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta(\frac{\varepsilon}{2}) > 0$ ที่ทำให้สำหรับทุก $x \in A$

ถ้า $0 < |x-c| < \delta(\frac{\varepsilon}{2})$ แล้ว $|f(x)-L| < \frac{\varepsilon}{2}$

เช่นเดียวกัน จะมี $\delta'(\frac{\varepsilon}{2})$ ที่ทำให้สำหรับทุก $x \in A$ ถ้า $0 < |x-c| < \delta'(\frac{\varepsilon}{2})$ แล้ว

$|f(x)-L'| < \frac{\varepsilon}{2}$ ให้ $\delta = \inf\{\delta(\frac{\varepsilon}{2}), \delta'(\frac{\varepsilon}{2})\}$

ดังนั้น ถ้า $x \in A$ และ $0 < |x-c| < \delta$

โดยอสมการสามเหลี่ยมจะได้ว่า $|L-L'| \le |L-f(x)|+|f(x)-L'| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

เนื่องจาก $\varepsilon > 0$ เป็น ε ใด ๆ โดยทฤษฎีบท 2.1.6 จะได้ว่า $L - L' = 0$

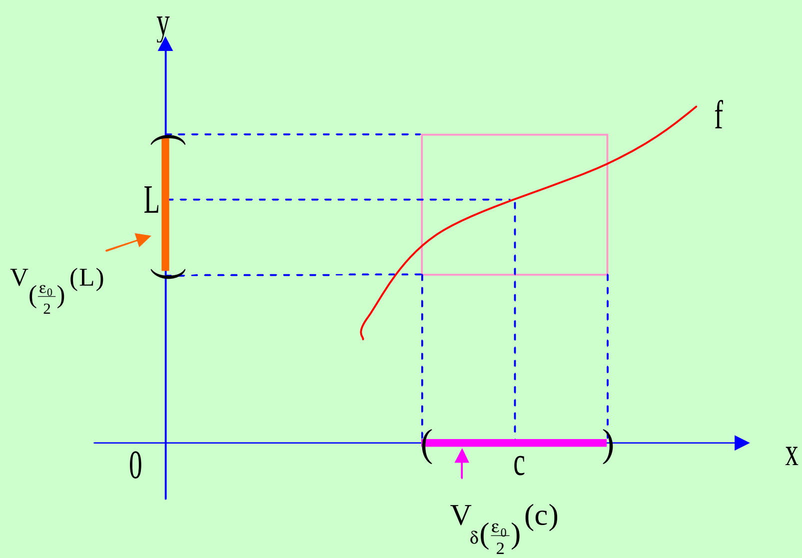
เพราะฉะนั้น $L = L'$

#

อธิบายแนวคิดทฤษฎีบท 6.1.2 **ประกอบรูปกราฟ**

สำหรับ $f : A \to \mathbb{R}$ และ c เป็นจุดลิมิตของ A

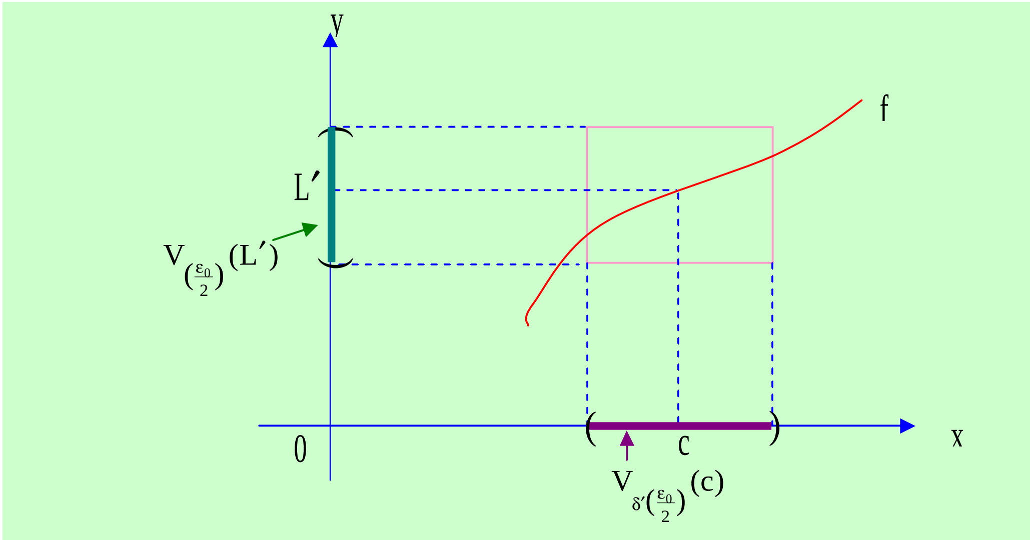
(1) ให้ L เป็นลิมิตของ f ที่ c ถ้าเลือก $\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{2}$ และมี $\delta(\frac{\varepsilon_0}{2})$ ตามบทนิยาม 6.1.2 เขียนกราฟได้ดังนี้



รูปที่ 6.1.7 : f(x) ® L **ขณะที่** x ® c

จะได้ว่า ถ้า $x \in V_{\delta(\frac{\varepsilon_0}{2})}(c)$ แล้ว $f(x) \in V_{(\frac{\varepsilon_0}{2})}(L)$

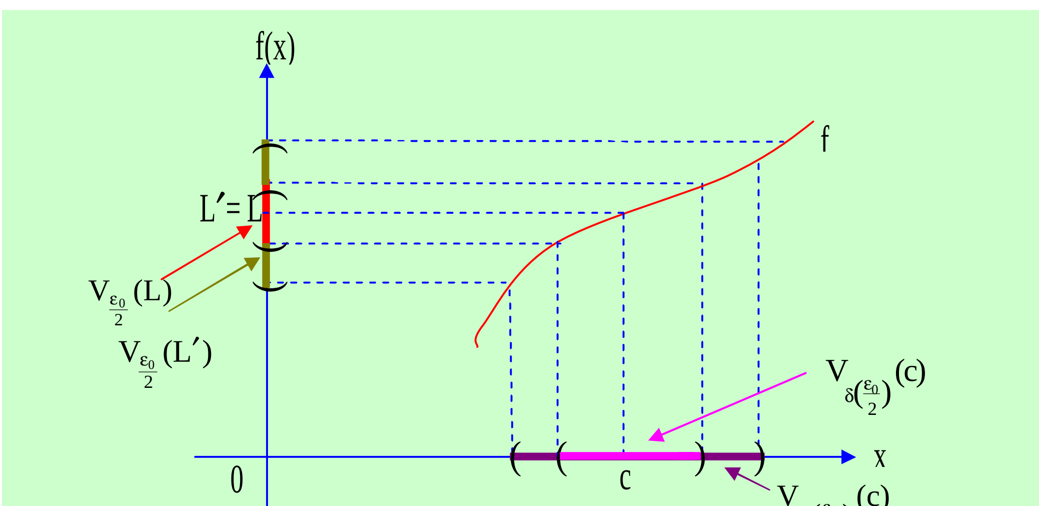
(2) ให้ L' เป็นลิมิตของ f ที่ c ถ้าเลือก $\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{2}$ และมี $\delta'(\frac{\varepsilon_0}{2})$ ตามบทนิยาม 6.1.2 เขียนกราฟได้ดังนี้



รูปที่ 6.1.8 : $f(x) \to L'$ **ขณะที่** $x \to c$

จะได้ว่า ถ้า $x \in V_{\delta'(\frac{\varepsilon_0}{2})}(c)$ แล้ว $f(x) \in V_{(\frac{\varepsilon_0}{2})}(L')$

(3) จาก (1) และ (2) เลือก $\delta = \inf\{\, \delta(\frac{\varepsilon_0}{2}) \,,\, \delta'(\frac{\varepsilon_0}{2}) \}$
ดังนั้น ถ้า $x \in [V_{\delta(\frac{\varepsilon_0}{2})}(c) \cap V_{\delta'(\frac{\varepsilon_0}{2})}(c)]$ แล้ว $f(x) \in [V_{(\frac{\varepsilon_0}{2})}(L) \cap V_{(\frac{\varepsilon_0}{2})}(L')]$
นั่นคือ L และ L' อยู่ใน $V_{(\frac{\varepsilon_0}{2})}(L) \cap V_{(\frac{\varepsilon_0}{2})}(L')$ จะได้ระยะทางระหว่าง L และ L' น้อยกว่า ε_0 เนื่องจาก $\frac{\varepsilon_0}{2}$ เป็นการเลือกใด ๆ ดังนั้น แต่ละ ε จะเขียนกราฟได้ในทำนองเดียวกัน แต่ละ $\varepsilon > 0$ จะได้ระยะทางระหว่าง L และ L' น้อยกว่า ε โดยทฤษฎีบท 2.1.6 จะได้ว่า $L - L' = 0$ ดังนั้น $L = L'$ เขียนรูปกราฟได้ดังนี้



6.1.9 : f **มีลิมิตที่** c **เพียงค่าเดียว**

ทฤษฎีบท 6.1.3 ให้ $f : A \to \mathbb{R}$ และ c เป็นจุดลิมิตของ A
ดังนั้นข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

(1) $\lim\limits_{x \to c} f = L$

(2) สำหรับ ε - ย่านใกล้เคียง $V_\varepsilon(L)$ ของ L จะมี δ - ย่านใกล้เคียง $V_\delta(c)$ ของ c ที่ทำให้สำหรับทุก $x \neq c$ ถ้า $x \in V_\delta(c) \cap A$ แล้ว $f(x) \in V_\varepsilon(L)$

พิสูจน์ โดยใช้บทนิยาม 6.1.2 ก็จะได้ตามต้องการ

#

ตัวอย่าง 6.1.2

1. สำหรับ b เป็นค่าคงตัวใด ๆ จงแสดงว่า $\lim\limits_{x \to c} b = b$

วิธีทำ ให้ $f(x) = b$ สำหรับทุก $x \in \mathbb{R}$ จะต้องแสดงว่า $\lim\limits_{x \to c} b = b$

สำหรับ $\varepsilon > 0$ ให้ $\delta = 1$ ดังนั้น ถ้า $0 < |x - c| < 1$ จะมี

$|f(x) - b| = |b - b| = 0 < \varepsilon$

เนื่องจาก $\varepsilon > 0$ เป็น ε ใด ๆ

โดยบทนิยาม 6.1.2 จะได้ว่า $\lim\limits_{x \to c} f = b$

2. จงแสดงว่า $\lim\limits_{x \to c} x = c$

วิธีทำ ให้ $g(x) = x$ ทุก $x \in \mathbb{R}$

ถ้า $\varepsilon > 0$ เลือก $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$ ดังนั้น ถ้า $0 < |x - c| < \delta(\varepsilon)$ จะมี

$|g(x) - c| = |x - c| < \varepsilon$

เนื่องจาก $\varepsilon > 0$ เป็น ε ใด ๆ

โดยบทนิยาม 6.1.2 จะได้ว่า $\lim\limits_{x \to c} g = c$

3. จงแสดงว่า $\lim\limits_{x \to c} x^2 = c^2$

วิธีทำ ให้ $h(x) = x^2$ ทุก $x \in \mathbb{R}$

จะต้องแสดงว่า $|h(x) - c^2| = |x^2 - c^2| < \varepsilon$ ซึ่ง $\varepsilon > 0$ โดยการทำ x ใกล้ชิดกับ c เพียงพอ พิจารณา $x^2 - c^2 = (x + c)(x - c)$

ถ้า $|x - c| < 1$ แล้ว $|x| \leq |c| + 1$ จะได้ว่า $|x + c| \leq |x| + |c| \leq 2|c| + 1$

ดังนั้น ถ้า $|x - c| < 1$ จะได้ว่า

$|x^2 - c^2| = |x + c||x - c| \leq (2|c| + 1)|x - c|$ ....(6.1.1)

และเทอมด้านขวาของอสมการ (6.1.1) จะน้อยกว่า ε ถ้าให้ $|x - c| < \dfrac{\varepsilon}{2|c| + 1}$

ดังนั้น ถ้าเลือก $\delta(\varepsilon) = \inf\{1, \dfrac{\varepsilon}{2|c|+1}\}$

สำหรับ $0 < |x-c| < \delta(\varepsilon)$ จะได้ว่า $|x-c| < 1$ นั่นคือ อสมการ (6.1.1)

สมเหตุสมผล และเนื่องจาก $|x-c| < \dfrac{\varepsilon}{2|c|+1}$

ดังนั้น $|x^2-c^2| \le (2|c|+1)|x-c| < \varepsilon$

เนื่องจาก แต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta(\varepsilon) = \inf\{1, \dfrac{\varepsilon}{2|c|+1}\} > 0$ ที่ทำให้ ทุก $x \in \mathbb{R}$

ถ้า $0 < |x-c| < \delta(\varepsilon)$ แล้ว $|x^2-c^2| < \varepsilon$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to c} h = \lim\limits_{x\to c} x^2 = c^2$

4. จงแสดงว่า $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{c}$ ถ้า $c > 0$

วิธีทำ ให้ $\varphi(x) = \dfrac{1}{x}$ สำหรับ $x > 0$ และให้ $c > 0$

เพื่อแสดงว่า $\lim\limits_{x\to c} \varphi = \dfrac{1}{c}$ จะพิจารณาผลต่าง $\left|\varphi(x) - \dfrac{1}{c}\right| = \left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{c}\right| < \varepsilon$

ซึ่ง $\varepsilon > 0$ โดยการทำ x ใกล้ชิดกับ $c > 0$ เพียงพอ

ขั้นแรกพิจารณา $\left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{c}\right| = \left|\dfrac{1}{cx}(c-x)\right| = \dfrac{1}{cx}|x-c|$ สำหรับ $x > 0$

ซึ่งจะได้ขอบเขตบนสำหรับเทอม $\dfrac{1}{cx}$ เป็นจริง ในบางย่านใกล้เคียงของ c

โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ถ้า $|x-c| < \dfrac{1}{2}c$ แล้ว $\dfrac{1}{2}c < x < \dfrac{3}{2}c$

ดังนั้น $0 < \dfrac{1}{cx} < \dfrac{2}{c^2}$ สำหรับ $|x-c| < \dfrac{1}{2}c$

ดังนั้น สำหรับค่าของ x ดังกล่าว จะมี

$$\left|\varphi(x) - \frac{1}{c}\right| \le \frac{2}{c^2}|x-c| \qquad \text{............................} \quad (6.1.2)$$

เพื่อจะทำเทอมด้านขวาของอสมการน้อยกว่า ε เป็นการเพียงพอที่จะให้

$$|x-c| < \frac{1}{2}c^2\varepsilon$$

ดังนั้น ถ้าเลือก $\delta(\varepsilon) = \inf\{\dfrac{1}{2}c, \dfrac{1}{2}c^2\varepsilon\}$

สำหรับ $0 < |x-c| < \delta(\varepsilon)$ จะได้ว่า $|x-c| < \dfrac{1}{2}c$

นั่นคือ อสมการ (6.1.2) สมเหตุสมผล และเนื่องจาก $|x-c| < \dfrac{1}{2}c^2\varepsilon$

ดังนั้น $\left|\varphi(x) - \dfrac{1}{c}\right| = \left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{c}\right| < \varepsilon$

เนื่องจาก แต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta(\varepsilon) = \inf\{\frac{1}{2}c, \frac{1}{2}c^2\varepsilon\} > 0$ ที่ทำให้ ทุก $x \in \mathbb{R}$

ถ้า $0 < |x-c| < \delta(\varepsilon)$ แล้ว $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{c}\right| < \varepsilon$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to c} \varphi = \frac{1}{c}$

5. จงแสดงว่า $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-4}{x^2+1} = \frac{4}{5}$

วิธีทำ ให้ $\varphi(x) = \frac{x^3-4}{x^2+1}$ สำหรับ $x \in \mathbb{R}$

ดังนั้น พิจารณาการคำนวณทางพีชคณิต

ให้ $\left|\varphi(x) - \frac{4}{5}\right| = \frac{|5x^3-4x^2-24|}{5(x^2+1)} = \frac{|5x^2+6x+12|}{5(x^2+1)} \cdot |x-2|$

เพื่อจะได้ขอบเขตบนของสัมประสิทธิ์ $|x-2|$ จะแทน x โดยเงื่อนไข $1 < x < 3$

(เนื่องจาก $x \longrightarrow 2$) นั่นคือ เราได้ว่า $|x-2| < 1$

สำหรับ x ในช่วงนี้ จะมี $5x^2+6x+12 \le 5(3^2)+6(3)+12 = 75$ และ

$5(x^2+1) \ge 5(1+1) = 10$ นั่นคือ $\left|\varphi(x) - \frac{4}{5}\right| \le \frac{75}{10}|x-2| = \frac{15}{2}|x-2|$

ขณะนี้ สำหรับ $\varepsilon > 0$ จะเลือก $\delta(\varepsilon) = \inf\{1, \frac{2}{15}\varepsilon\}$

ดังนั้น ถ้า $0 < |x-2| < \delta(\varepsilon)$ จะได้ว่า $\left|\varphi(x) - \frac{4}{5}\right| \le \frac{15}{2}|x-2| < \varepsilon$

เนื่องจาก $\varepsilon > 0$ เป็น ε ใด ๆ

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-4}{x^2+1} = \frac{4}{5}$

#

6.1.3 เกณฑ์โดยลำดับสำหรับลิมิตฟังก์ชัน

ต่อไปเป็นกฎเกณฑ์ที่สำคัญของลิมิตฟังก์ชันในเทอมของลิมิตลำดับ เพื่อประยุกต์ในการศึกษาลิมิตของฟังก์ชัน

ทฤษฎีบท 6.1.4 **เกณฑ์โดยลำดับ** (Sequential Criterion)

ให้ $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ และ c เป็นจุดลิมิตของ A

ดังนั้นข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

(1) $\lim\limits_{x\to c} f = L$

(2) สำหรับแต่ละลำดับ (x_n) ใน A ซึ่ง $x_n \neq c$ ทุกจำนวนธรรมชาติ n ถ้า (x_n) ลู่เข้าสู่ c แล้ว ลำดับ $(f(x_n))$ ลู่เข้าสู่ L

พิสูจน์ (1)$\Rightarrow$(2)

สมมุติ f มีลิมิต L ที่ c และ (x_n) เป็นลำดับใน A ซึ่ง $\lim(x_n) = c$ และ $x_n \neq c$

ทุก $n \in \mathbf{N}$ จะแสดงว่า ลำดับ $(f(x_n))$ ลู่เข้าสู่ L

ให้ $\varepsilon > 0$ ดังนั้น โดยบทนิยาม 6.1.2 จะมี $\delta > 0$ ที่ทำให้สำหรับทุก $x \in A$

ถ้า $0 < |x - c| < \delta$ แล้ว $|f(x) - L| < \varepsilon$

เนื่องจาก $\lim(x_n) = c$ และ $\delta > 0$

ดังนั้น จะมีจำนวนธรรมชาติ $K(\delta)$ ที่ทำให้สำหรับทุกจำนวนธรรมชาติ n

ถ้า $n \geq K(\delta)$ แล้ว $|x_n - c| < \delta$

เนื่องจาก $x_n \neq c$ จะได้ว่า $0 < |x_n - c| < \delta$

จะได้ว่า สำหรับแต่ละ x_n จะมี $|f(x_n) - L| < \varepsilon$

นั่นคือ ถ้า $n \geq K(\delta)$ แล้ว $|f(x_n) - L| < \varepsilon$

เพราะฉะนั้น ลำดับ $(f(x_n))$ ลู่เข้าสู่ L

(2)$\Rightarrow$(1)

สมมุติว่า $\lim\limits_{x \to c} f \neq L$

ดังนั้น จะมี $\varepsilon_0 > 0$ สำหรับแต่ละ $\delta > 0$ จะมี $x_\delta \in A$ ซึ่ง $0 < |x_\delta - c| < \delta$

แต่ $|f(x_\delta) - L| \geq \varepsilon_0$ ดังนั้น ทุกจำนวนธรรมชาติ n จะมี $x_n \in A$

ซึ่ง $0 < |x_n - c| < \dfrac{1}{n}$ และ $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon_0$

จากสมมุติฐานของบทกลับ เรามี ลำดับ $(f(x_n))$ ลู่เข้าสู่ L

ดังนั้น จะมีจำนวนธรรมชาติ K ที่ทำให้สำหรับทุกจำนวนธรรมชาติ n

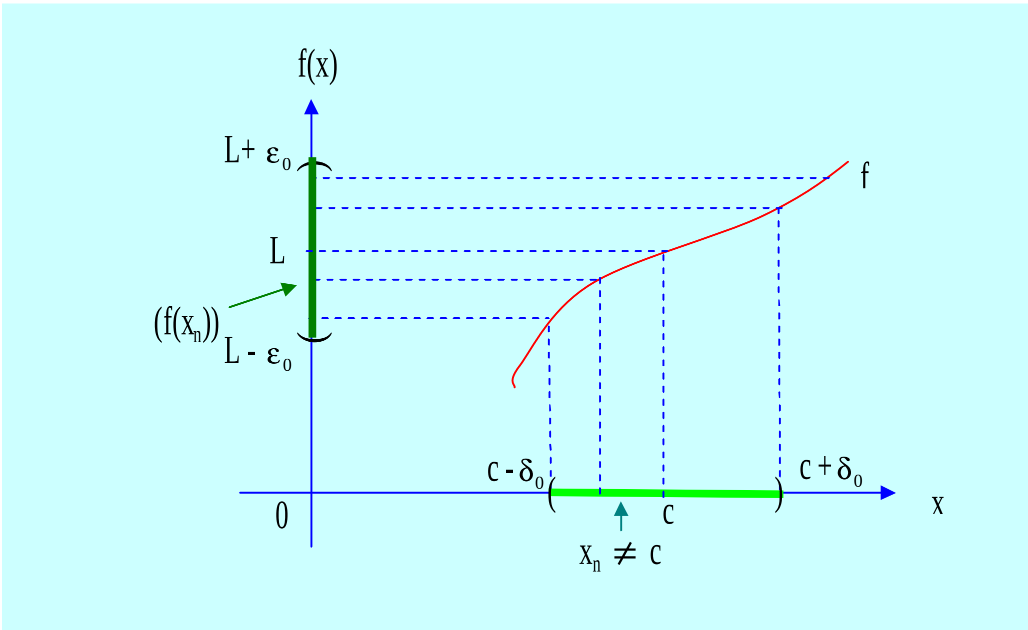
ถ้า $n \geq K$ แล้ว $|f(x_n) - L| < \varepsilon_0$ ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $\lim\limits_{x \to c} f \neq L$ จึงเป็นไปไม่ได้

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x \to c} f = L$

#

จากทฤษฎีบท 6.1.4 ถ้าเลือก $\varepsilon = \varepsilon_0$ และมี $\delta = \delta_0$ ตามบทนิยาม 6.1.2 เขียนกราฟได้ดังนี้



รูปที่ 6.1.10 : $\lim\limits_{x \to c} f = L$ **สมมูลกับ ถ้า** (x_n) ® c **แล้ว** $(f(x_n))$ ® L

6.1.4 **เกณฑ์การลู่ออกสำหรับลิมิตฟังก์ชัน**

เพื่อแสดงข้อ (1) ในทฤษฎีบท 6.1.4 ว่า ไม่มีจำนวนที่แน่นอนเป็นลิมิตของฟังก์ชันที่จุดใดจุดหนึ่ง หรือข้อ (2) ฟังก์ชันไม่มีลิมิตของจุด จะได้โดยการนิเสธทฤษฎีบท 6.1.4 ดังทฤษฎีบท 6.1.5

ทฤษฎีบท 6.1.5 **เกณฑ์การลู่ออก** (Divergence Criteria)

ให้ $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ และ $c \in \mathbb{R}$ เป็นจุดลิมิตของ A

(1) สำหรับ $L \in \mathbb{R}$ ดังนั้น f ไม่มีลิมิต L ที่ c ก็ต่อเมื่อ มีลำดับ (x_n) ใน A ซึ่ง $x_n \neq c$ ทุก $n \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ ลำดับ (x_n) ลู่เข้าสู่ c แต่ลำดับ $(f(x_n))$ ไม่ลู่เข้าสู่ L

(2) ฟังก์ชัน f ไม่มีลิมิตที่ c ก็ต่อเมื่อ มีลำดับ (x_n) ใน A ซึ่ง $x_n \neq c$ ทุก $n \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ ลำดับ (x_n) ลู่เข้าสู่ c แต่ลำดับ $(f(x_n))$ ไม่ลู่เข้าใน $\mathbb{R}$

พิสูจน์ โดยนิเสธทฤษฎีบท 6.1.4 จะได้ตามต้องการ

#

ต่อไปจะให้การประยุกต์บางอย่างของทฤษฎีบท 6.1.5 เพื่อแสดงวิธีการที่สามารถนำไปใช้

ตัวอย่าง 6.1.3

1. จงแสดงว่า $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$ ไม่มีค่า

วิธีทำ ให้ลำดับ (x_n) ซึ่ง $x_n = \dfrac{1}{n}$ สำหรับ $n \in \mathbb{N}$

ดังนั้น $\lim (x_n) = 0$ และ $x_n \neq 0$ ทุก $n \in \mathbb{N}$ แต่ $\varphi(x_n) = \dfrac{1}{(\frac{1}{n})} = n$

จะได้ว่า ลำดับ $(\varphi(x_n)) = (n)$ ไม่ลู่เข้าใน $\mathbb{R}$ เนื่องจาก ไม่มีขอบเขต

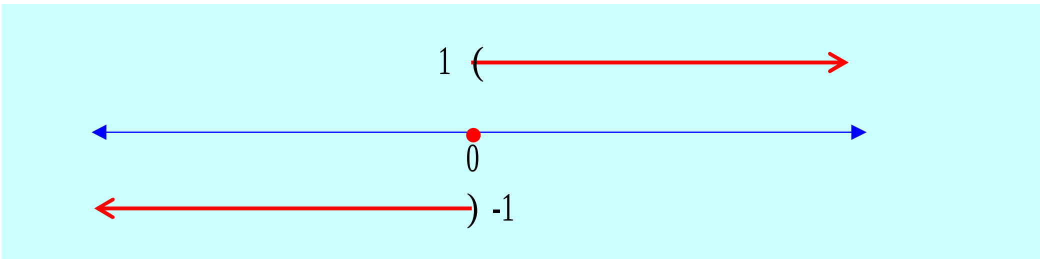
โดยทฤษฎีบท 6.1.5(2) จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$ ไม่มีค่า

2. จงแสดงว่า $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sgn} x$ ไม่มีค่า

วิธีทำ ให้ฟังก์ชันซิกนัม (signum function) กำหนดโดย

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1 & ; \ x > 0 \\ 0 & ; \ x = 0 \\ -1 & ; \ x < 0 \end{cases}$$

$\operatorname{sgn} x = \dfrac{x}{|x|}$ สำหรับ $x \neq 0$ ดังรูปที่ 6.1.11



รูปที่ 6.1.11 : **ฟังก์ชันซิกนัม**

จะแสดงว่า sgn ไม่มีลิมิตที่ $x = 0$

จะทำโดยการแสดงว่า มีลำดับ (x_n) โดยที่ $\lim (x_n) = 0$ แต่ $(\operatorname{sgn}(x_n))$ ไม่ลู่เข้า

ให้ $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ สำหรับ $n \in \mathbb{N}$

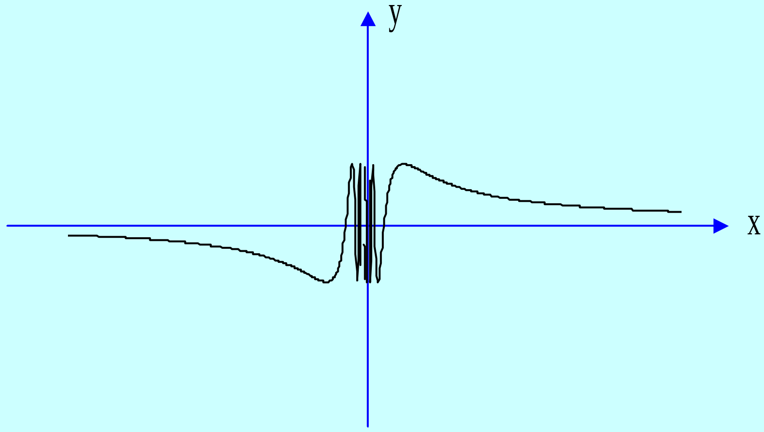
ดังนั้น $\lim (x_n) = 0$ อย่างไรก็ตาม เนื่องจาก $\operatorname{sgn}(x_n) = (-1)^n$ สำหรับ $n \in \mathbb{N}$

โดยตัวอย่าง 4.4.3(1) เราได้ว่า $(\operatorname{sgn}(x_n))$ ไม่ลู่เข้า

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sgn} x$ ไม่มีค่า

3. จงแสดงว่า $\lim\limits_{x \to 0} \sin \dfrac{1}{x}$ ไม่มีค่า

วิธีทำ ให้ $g(x) = \sin \dfrac{1}{x}$ สำหรับ $x \neq 0$ ดังรูปที่ 6.1.12



รูปที่ 6.1.12 : **ฟังก์ชัน** $g(x) = \sin \dfrac{1}{x}$, (x ¹ 0)

จะแสดงว่า g ไม่มีลิมิตที่ $c = 0$

สมมุติ g มีลิมิตที่ $c = 0$ นั่นคือให้ $\lim\limits_{x \to 0} \sin \dfrac{1}{x} = L$

สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ ให้ $x_n = \dfrac{1}{n\pi}$ และ $y_n = \left(\dfrac{1}{2}\pi + 2\pi n\right)^{-1}$

เนื่องจาก $\sin t = 0$ ถ้า $t = n\pi$ สำหรับ $n \in \mathbb{Z}$ และ $\sin t = +1$

ถ้า $t = \dfrac{1}{2}\pi + 2\pi n$ สำหรับ $n \in \mathbb{Z}$

ดังนั้น $\lim (x_n) = 0$ และ $\lim (y_n) = 0$ โดยที่ $x_n \neq 0$ และ $y_n \neq 0$

โดยทฤษฎีบท 6.1.4 จะได้ว่า $L = \lim\limits_{n \to \infty} \sin \dfrac{1}{x_n} = \lim\limits_{n \to \infty} \sin (n\pi) = 0$

และ $L = \lim\limits_{n \to \infty} \sin \dfrac{1}{y_n} = \lim\limits_{n \to \infty} \sin \left(\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1$ นั่นคือ เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น g ไม่มีลิมิต L ที่ $c = 0$

เนื่องจาก L เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะได้ว่า g ไม่มีลิมิตที่ $c = 0$

โดยทฤษฎีบท 6.1.5(2) จะได้ว่า $\lim\limits_{x \to 0} \sin \dfrac{1}{x}$ ไม่มีค่า

#

สรุปแนวคิดลิมิตของฟังก์ชัน

1. สำหรับ $A \subseteq \mathbb{R}$ และ $c \in \mathbb{R}$
   c เป็นจุดลิมิตของ A ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $\delta > 0$ จะมี $x \in A$ ซึ่ง $x \neq c$ ที่ทำให้ $|x-c| < \delta$
2. $c \in \mathbb{R}$ เป็นจุดลิมิตของ $A \subseteq \mathbb{R}$ ก็ต่อเมื่อ มีลำดับ (a_n) ใน A ที่ทำให้ $\lim (a_n) = c$ และ $a_n \neq c$ ทุก $n \in \mathbb{N}$
3. สำหรับ $A \subseteq \mathbb{R}$ และ $L \in \mathbb{R}$ ให้ c เป็นจุดลิมิตของ A และ $f: A \to \mathbb{R}$
   L เป็นลิมิตของ f ที่ c ก็ต่อเมื่อ สำหรับ ε ใด ๆ ซึ่ง $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ที่ทำให้สำหรับทุก $x \in A$ ถ้า $0 < |x-c| < \delta$ แล้ว $|f(x)-L| < \varepsilon$
4. ถ้า $f: A \to \mathbb{R}$ และ c เป็นจุดลิมิตของ A แล้ว f มีลิมิตที่ c เพียงค่าเดียว
5. ให้ $f: A \to \mathbb{R}$ และ c เป็นจุดลิมิตของ A
   ดังนั้นข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน
   (1) $\lim\limits_{x \to c} f = L$
   (2) สำหรับ ε - ย่านใกล้เคียง $V_\varepsilon(L)$ ของ L จะมี δ - ย่านใกล้เคียง $V_\delta(c)$ ของ c ที่ทำให้สำหรับทุก $x \neq c$ ถ้า $x \in V_\delta(c) \cap A$ แล้ว $f(x) \in V_\varepsilon(L)$
6. ให้ $f: A \to \mathbb{R}$ และ c เป็นจุดลิมิตของ A
   ดังนั้นข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน
   (1) $\lim\limits_{x \to c} f = L$
   (2) สำหรับแต่ละลำดับ (x_n) ใน A ซึ่ง $x_n \neq c$ ทุกจำนวนธรรมชาติ n ถ้า (x_n) ลู่เข้าสู่ c แล้ว ลำดับ $(f(x_n))$ ลู่เข้าสู่ L
7. ให้ $A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ และ $c \in \mathbb{R}$ เป็นจุดลิมิตของ A
   7.1 สำหรับ $L \in \mathbb{R}$ ดังนั้น f ไม่มีลิมิต L ที่ c ก็ต่อเมื่อ มีลำดับ (x_n) ใน A ซึ่ง $x_n \neq c$ ทุก $n \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ ลำดับ (x_n) ลู่เข้าสู่ c แต่ลำดับ $(f(x_n))$ ไม่ลู่เข้าสู่ L
   7.2 ฟังก์ชัน f ไม่มีลิมิตที่ c ก็ต่อเมื่อ มีลำดับ (x_n) ใน A ซึ่ง $x_n \neq c$ ทุก $n \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ ลำดับ (x_n) ลู่เข้าสู่ c แต่ลำดับ $(f(x_n))$ ไม่ลู่เข้าใน $\mathbb{R}$

แบบฝึกหัด 6.1

1. ให้ c เป็นจุดลิมิตของ $A \subseteq \mathbb{R}$ และ $f : A \to \mathbb{R}$
   จงพิสูจน์ว่า $\lim_{x \to c} f(x) = L$ ก็ต่อเมื่อ $\lim_{x \to c} |f(x) - L| = 0$
2. ให้ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ และ $c \in \mathbb{R}$
   จงแสดงว่า $\lim_{x \to c} f(x) = L$ ก็ต่อเมื่อ $\lim_{x \to 0} f(x + c) = L$
3. ให้ $I = (0, a)$ ซึ่ง $a > 0$ และ $g(x) = x^2$ สำหรับ $x \in I$
   สำหรับจุด x, c ใด ๆ ซึ่ง $x, c \in I$ จงแสดงว่า
   3.1 $|g(x) - c^2| \le 2a|x - c|$
   3.2 ใช้อสมการในข้อ 3.1 เพื่อพิสูจน์ว่า $\lim_{x \to c} x^2 = c^2$ สำหรับ $c \in I$
4. ให้ I เป็นช่วงใน $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ และ $c \in I$
   สมมุติว่า มีค่าคงตัว K และ L โดยที่ $|f(x) - L| \le K|x - c|$ สำหรับ $x \in I$
   จงแสดงว่า $\lim_{x \to c} f = L$
5. จงแสดงว่า $\lim_{x \to c} x^3 = c^3$ สำหรับ $c \in \mathbb{R}$
6. จงแสดงว่า $\lim_{x \to c} \sqrt{x} = \sqrt{c}$ สำหรับ $c > 0$
7. ใช้บทนิยาม 6.1.2 หรือเกณฑ์โดยลำดับสำหรับลิมิต เพื่ออธิบายลิมิตต่อไปนี้
   7.1 $\lim_{x \to 2} \frac{1}{1 - x} = -1$
   7.2 $\lim_{x \to 1} \frac{x}{1 + x} = \frac{1}{2}$
   7.3 $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{|x|} = 0$
   7.4 $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x + 1}{x + 1} = \frac{1}{2}$
8. ใช้บทนิยามของลิมิต เพื่อแสดงว่า
   8.1 $\lim_{x \to 2} (x^2 + 4x) = 12$
   8.2 $\lim_{x \to -1} \frac{x + 5}{2x + 3} = 4$

9. จงแสดงว่าลิมิตต่อไปนี้ ไม่มีค่า

9.1 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}$ สำหรับ $x > 0$

9.2 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ สำหรับ $x > 0$

9.3 $\lim\limits_{x\to 0} (x + \operatorname{sgn} x)$

9.4 $\lim\limits_{x\to 0} \sin\dfrac{1}{x^2}$

10. สมมุติ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ มีลิมิต L ที่ 0 และ $a > 0$
ถ้า $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ นิยามโดย $g(x) = f(ax)$ สำหรับ $x \in \mathbb{R}$
จงแสดงว่า $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = L$

11. ให้ $c \in \mathbb{R}$ และ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ โดยที่ $\lim\limits_{x\to c} (f(x))^2 = L$

11.1 จงแสดงว่า ถ้า $L = 0$ แล้ว $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 0$

11.2 จงยกตัวอย่าง ถ้า $L \neq 0$ แล้ว f จะไม่มีลิมิตที่ c

12. ให้ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ นิยามโดย

$$f(x) = \begin{cases} x \; ; & x \in \mathbb{Q} \\ 0 \; ; & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

12.1 จงแสดงว่า f มีลิมิตที่ $x = 0$

12.2 ใช้การอ้างเหตุผลโดยลำดับ เพื่อแสดงว่า ถ้า $c \neq 0$ แล้ว f ไม่มีลิมิตที่ c

13. ให้ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I เป็นช่วงเปิดใน $\mathbb{R}$ และ $c \in I$
ถ้า f_1 เป็นฟังก์ชันกำกัดของ f เทียบกับ I
จงแสดงว่า f_1 มีลิมิตที่ c ก็ต่อเมื่อ f มีลิมิตที่ c และลิมิตมีค่าเท่ากัน

14. ให้ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, J เป็นช่วงปิดใน $\mathbb{R}$ และ $c \in J$
ถ้า f_2 เป็นฟังก์ชันกำกัดของ f เทียบกับ J
จงแสดงว่า

14.1 ถ้า f มีลิมิตที่ c แล้ว f_2 มีลิมิตที่ c

14.2 จงยกตัวอย่างข้อความต่อไปนี้ไม่จริง

“ ถ้า f_2 มีลิมิตที่ c แล้ว f มีลิมิตที่ c ”

6.2 **ทฤษฎีบทลิมิต** (Limit Theorems)

ขณะนี้ได้ผลที่จะนำมาใช้ประโยชน์ในการคำนวณลิมิตของฟังก์ชัน โดยผลเหล่านี้อยู่ในแนวเดียวกันกับทฤษฎีบทลิมิตสำหรับลำดับที่สร้างขึ้นในหัวข้อ 4.2 โดยข้อเท็จจริงผลดังกล่าวทั้งหมดสามารถพิสูจน์โดยใช้ทฤษฎีบท 6.1.4 และผลจากหัวข้อ 4.2

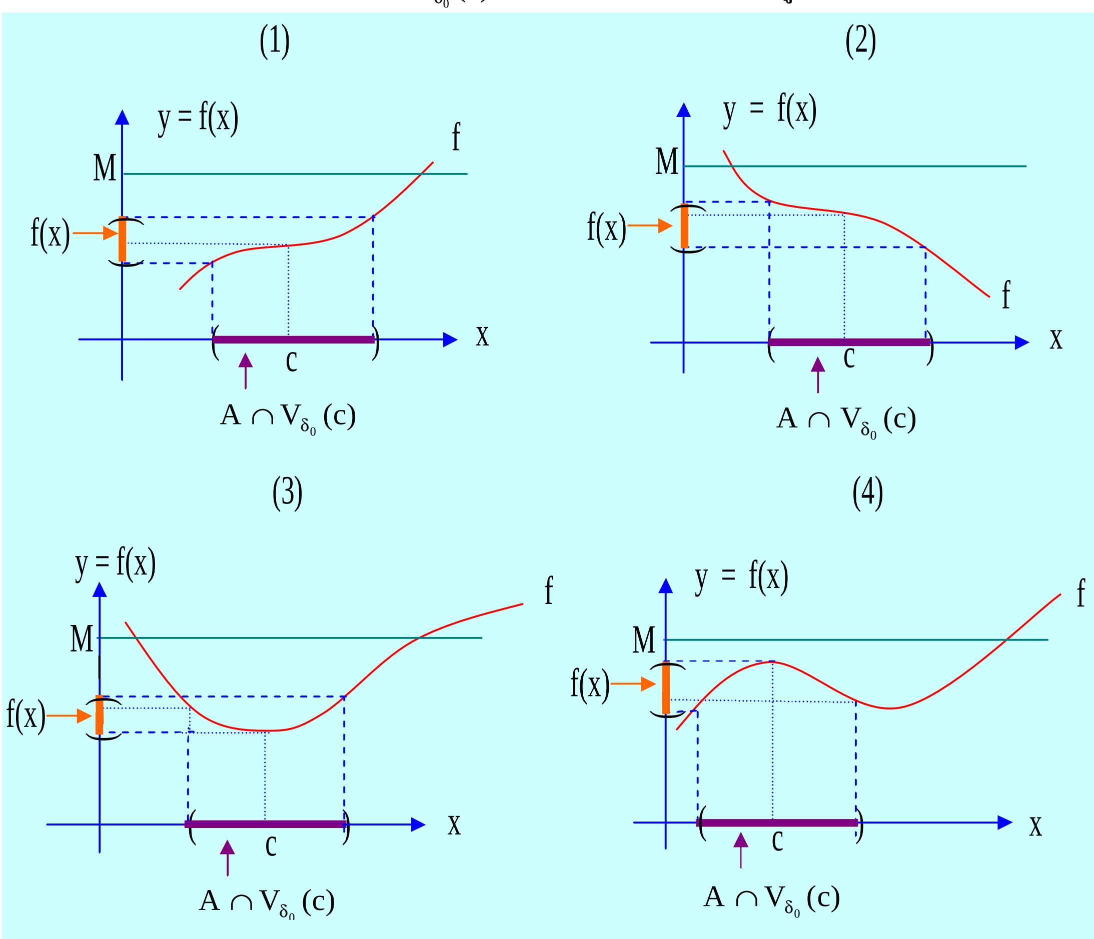
อย่างไรก็ตามอีกวิธีการหนึ่ง ผลในหัวข้อนี้สามารถพิสูจน์โดยใช้ การอ้างเหตุผล ε และ δ ที่คล้ายคลึงกับที่ใช้ในหัวข้อ 4.2

6.2.1 **ความหมายและทฤษฎีบทฟังก์ชันที่มีขอบเขต**

บทนิยาม 6.2.1 สำหรับ $A \subseteq \mathbb{R}$ ให้ $f : A \to \mathbb{R}$ และ $c \in \mathbb{R}$ เป็นจุดลิมิตของ A

f มีขอบเขต บนย่านใกล้เคียง ก็ต่อเมื่อ มี δ- ย่านใกล้เคียง $V_\delta(c)$ ของ c และค่าคงที่ $M > 0$ ที่ทำให้ $|f(x)| \le M$ ทุก $x \in A \cap V_\delta(c)$

จากบทนิยาม 6.2.1 สำหรับ $V_{\delta_0}(c)$ และค่าคงที่ M อาจเขียนรูปกราฟประกอบได้ดังนี้



รูปที่ 6.2.1 : $|f(x)| \le M$ **ทุก** x Î A Ç $V_{\delta_0}(c)$

หมายเหตุ 6.2.1 จากรูปที่ 6.2.1 ดังกล่าวเป็นกรณี $f(x) > 0$ สำหรับกรณี $f(x) < 0$ สามารถพิจารณาได้ในทำนองเดียวกัน นั่นคือ $f(x) \geq -M$ ทุก $x \in A \cap V_\delta(c)$

ทฤษฎีบท 6.2.1 ถ้า $A \subseteq \mathbb{R}$ และ $f : A \to \mathbb{R}$ มีลิมิตที่ $c \in \mathbb{R}$ แล้ว f มีขอบเขต บนบางย่านใกล้เคียงของ c

พิสูจน์ ให้ $L = \lim\limits_{x \to c} f$ ดังนั้น สำหรับ $\varepsilon = 1$ จะมี $\delta > 0$ ที่ทำให้สำหรับทุก $x \in A$

ถ้า $0 < |x - c| < \delta$ แล้ว $|f(x) - L| < 1$

ดังนั้น $|f(x)| - |L| \leq |f(x) - L| < 1$

จะได้ว่า ถ้า $x \in A \cap V_\delta(c)$, $x \neq c$ แล้ว $|f(x)| \leq |L| + 1$

ถ้า f ไม่นิยามที่ $x = c$ ให้ $M = |L| + 1$

ขณะที่ ถ้า f นิยามที่ $x = c$ ให้ $M = \sup\{|f(c)|, |L| + 1\}$

จะได้ว่า ถ้า $x \in A \cap V_\delta(c)$ แล้ว $|f(x)| \leq M$

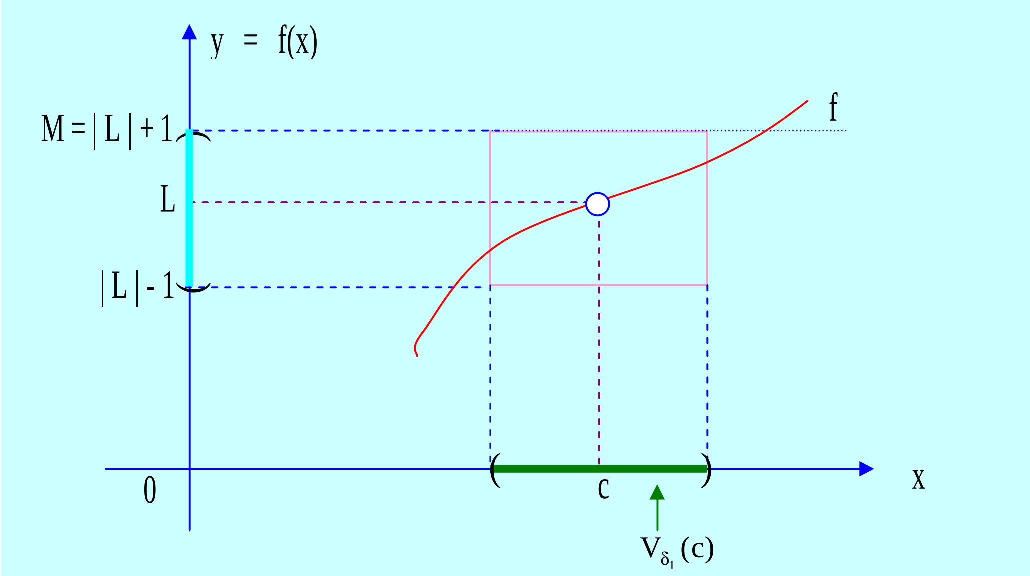
เพราะฉะนั้น f มีขอบเขต บนย่านใกล้เคียง $V_\delta(c)$ ของ c

#

อธิบายแนวคิดทฤษฎีบท 6.2.1 **ประกอบรูปกราฟ**

สำหรับ $f : A \to \mathbb{R}$ มีลิมิตที่ $c \in \mathbb{R}$ แล้ว f มีขอบเขต บนบางย่านใกล้เคียงของ c พิจารณา ดังนี้

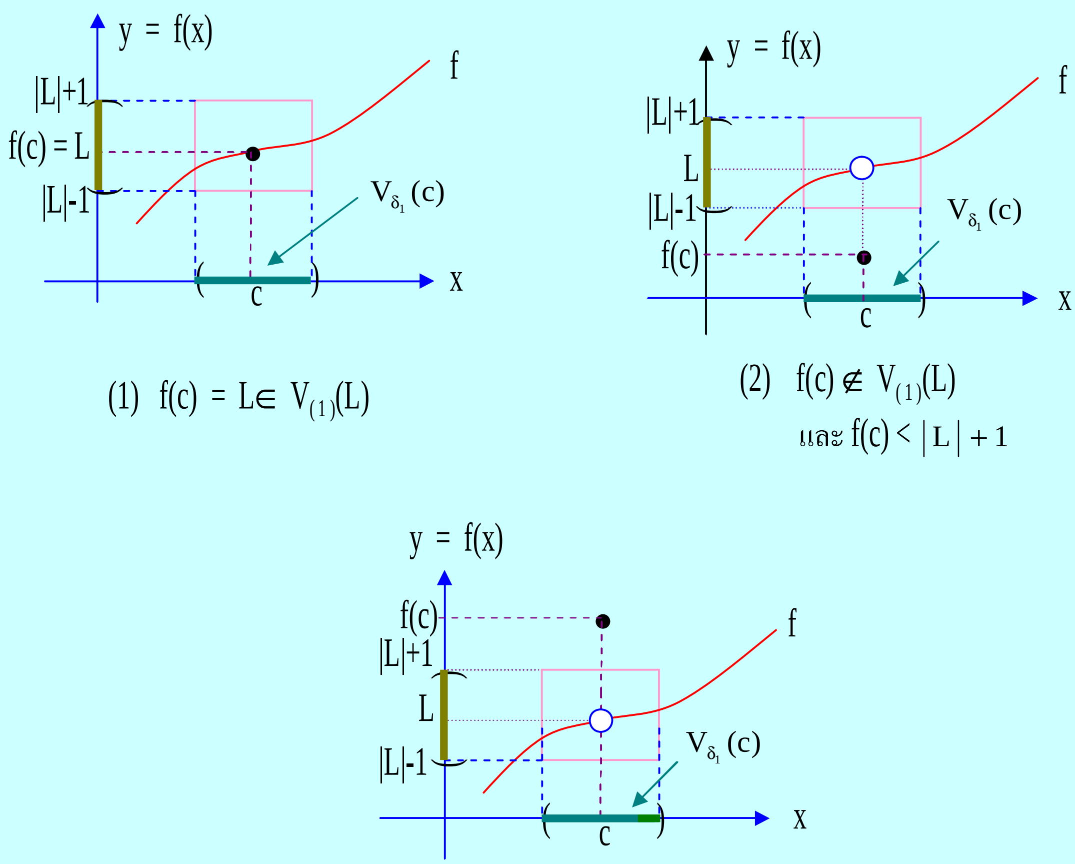
กรณี ฟังก์ชัน f **ไม่นิยามที่** $x = c$ ถ้าเลือก $\varepsilon = 1$ และมี $\delta_1 > 0$ ตามบทนิยาม 6.1.2 เขียนกราฟได้ดังนี้



รูปที่ 6.2.2 : $M = |L| + 1$ **สำหรับ** f **ไม่นิยามที่** $x = c$

จาก f มีลิมิตที่ c จะได้ว่า สำหรับ $x \in A \cap V_{\delta_1}(c)$, $x \neq c$ แล้ว $|f(x)| \leq |L|+1$ ดังนั้น ถ้าฟังก์ชัน f ไม่นิยามที่ x = c สามารถเลือก $M = |L|+1$ ซึ่งทำให้ $|f(x)| \leq M$ ทุก $x \in A \cap V_{\delta_1}(c)$

กรณี ฟังก์ชัน f **นิยามที่** x = c



รูปที่ 6.2.3 : $M = \sup\{|L|+1, f(c)\}$

จาก f มีลิมิตที่ c จะได้ว่า สำหรับ $x \in A \cap V_{\delta_1}(c)$, $x \neq c$ ดังนั้น $|f(x)| \leq |L|+1$ แต่เนื่องจาก ฟังก์ชัน f นิยามที่ x = c ดังนั้น ในการเลือก M จะต้องพิจารณาค่า f(c) ด้วย นั่นคือ $M = \sup\{|L|+1, f(c)\}$ จะทำให้ $|f(x)| \leq M$ ทุก $x \in A \cap V_{\delta_1}(c)$

#

6.2.2 ความหมายและทฤษฎีบทของการดำเนินการ บวก ลบ คูณ และหาร ฟังก์ชัน

บทนิยามต่อไปเหมือนกับบทนิยามสำหรับ ผลบวก ผลต่าง ผลคูณ และผลหาร ของลำดับในหัวข้อ 4.2

บทนิยาม 6.2.2 สำหรับ $A \subseteq \mathbb{R}$ และ f, g เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง $\mathbb{R}$

(1) ผลบวก $f+g$ ผลต่าง $f-g$ และผลคูณ fg จาก A ไปยัง $\mathbb{R}$

กำหนดโดย $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$

$(f-g)(x) = f(x)-g(x)$

$(fg)(x) = f(x)g(x)$

สำหรับทุก $x \in A$

(2) สำหรับ $b \in \mathbb{R}$ ผลคูณ bf เป็นฟังก์ชันที่กำหนดโดย

$(bf)(x) = bf(x)$ ทุก $x \in A$

(3) $h(x) \neq 0$ สำหรับ $x \in A$ ผลหาร $\frac{f}{h}$ เป็นฟังก์ชันที่กำหนดโดย

$\frac{f}{h}(x) = \frac{f(x)}{h(x)}$ ทุก $x \in A$

ทฤษฎีบท 6.2.2 สำหรับ $A \subseteq \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ และ $c \in \mathbb{R}$ เป็นจุดลิมิตของ A

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง $\mathbb{R}$

(1) ถ้า $\lim\limits_{x \to c} f = L$ และ $\lim\limits_{x \to c} g = M$ ดังนั้น

$\lim\limits_{x \to c} (f+g) = L+M$, $\lim\limits_{x \to c} (f-g) = L-M$, $\lim\limits_{x \to c} (fg) = LM$ และ

$\lim\limits_{x \to c} (bf) = bL$

(2) ถ้า $\lim\limits_{x \to c} f = L$ และ $h : A \to \mathbb{R}$ สำหรับ $h(x) \neq 0$ ทุก $x \in A$

โดยที่ $\lim\limits_{x \to c} h = H \neq 0$ ดังนั้น $\lim\limits_{x \to c} \frac{f}{h} = \frac{L}{H}$

พิสูจน์ ให้ (x_n) เป็นลำดับใด ๆ ใน A โดยที่ $x_n \neq c$

สำหรับ $n \in \mathbb{N}$ และ $c = \lim(x_n)$ จากทฤษฎีบท 6.1.4 จะได้ว่า

$\lim(f(x_n)) = L$ และ $\lim(g(x_n)) = M$

จะแสดงว่า $\lim\limits_{x \to c} (fg) = LM$

โดยบทนิยาม 6.2.2 เราได้ว่า $(fg)(x_n) = f(x_n)g(x_n)$ สำหรับ $n \in \mathbb{N}$

ดังนั้น โดยประยุกต์ทฤษฎีบท 4.2.2 จะได้ว่า

$\lim((fg)(x_n)) = \lim(f(x_n)g(x_n)) = [\lim(f(x_n))][\lim(g(x_n))] = L \cdot M$

โดยทฤษฎีบท 6.1.4 จะได้ว่า $\lim\limits_{x \to c} (fg) = \lim((fg)(x_n)) = L \cdot M$

สำหรับส่วนอื่น ๆ ของทฤษฎีบทนี้ สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน

#

หมายเหตุ 6.2.2

(1) ในทฤษฎีบท 6.2.2(2) สมมุติฐาน $H = \lim_{x \to c} h \neq 0$ ถ้าสมมุติฐานนี้ไม่จริง แล้ว $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{h(x)}$ อาจจะมีค่า หรือไม่มีค่า แต่ถึงแม้ว่า ถ้าลิมิตมีค่า ก็ไม่สามารถใช้ทฤษฎีบท 6.2.2(2) เพื่อหาค่า $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{h(x)}$

(2) ให้ $A \subseteq \mathbb{R}$ และ $f_1, f_2, \ldots, f_n$ เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง $\mathbb{R}$ และ c เป็นจุดลิมิตของ A ถ้า $L_k = \lim_{x \to c} f_k$ สำหรับ $k = 1, 2, \ldots, n$

ดังนั้น จากทฤษฎีบท 6.2.2 โดยการอ้างเหตุผลแบบอุปนัย จะได้ว่า

$$L_1 + L_2 + \ldots + L_n = \lim_{x \to c} (f_1 + f_2 + \ldots + f_n)$$

และ $$L_1 \cdot L_2 \cdots L_n = \lim_{x \to c} (f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n)$$

โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ถ้า $L = \lim_{x \to c} f$ และ $n \in \mathbb{N}$ แล้ว $L^n = \lim_{x \to c} (f)^n$

ตัวอย่าง 6.2.1

1. จงยกตัวอย่างบางค่าของลิมิต ที่สร้างขึ้นในหัวข้อ 6.1 สามารถพิสูจน์โดยใช้ทฤษฎีบท 6.2.2

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim_{x \to c} x = c$ ดังนั้น $\lim_{x \to c} x^2 = c^2$

และถ้า $c > 0$ แล้ว $\lim_{x \to c} \frac{1}{x} = \frac{1}{\lim_{x \to c} x} = \frac{1}{c}$

2. จงแสดงว่า $\lim_{x \to 2} (x^2+1)(x^3-4) = 20$

วิธีทำ โดยทฤษฎีบท 6.2.2 จะได้ว่า

$$\lim_{x \to 2} (x^2+1)(x^3-4) = [\lim_{x \to 2} (x^2+1)]\,[\lim_{x \to 2} (x^3-4)] = 5(4) = 20$$

3. จงแสดงว่า $\lim_{x \to 2} \frac{x^3-4}{x^2+1} = \frac{4}{5}$

วิธีทำ โดยทฤษฎีบท 6.2.2 (2) จะได้ว่า $\lim_{x \to 2} \frac{x^3-4}{x^2+1} = \frac{\lim_{x \to 2}(x^3-4)}{\lim_{x \to 2}(x^2+1)} = \frac{4}{5}$

[เนื่องจากลิมิตของตัวหาร ($\lim_{x \to 2}(x^2+1) = 5$) ไม่เท่ากับ 0 ดังนั้น ทฤษฎีบท 6.2.2(2) สามารถใช้ได้]

4. จงแสดงว่า $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{3x-6} = \dfrac{4}{3}$

วิธีทำ ถ้าให้ $f(x) = x^2-4$ และ $h(x) = 3x-6$ สำหรับ $x \in \mathbb{R}$

ดังนั้น ไม่สามารถใช้ทฤษฎีบท 6.2.2(2) เพื่อหาค่า $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{h(x)}$

เพราะว่า $H = \lim\limits_{x\to 2} h(x) = \lim\limits_{x\to 2}(3x-6) = 3\lim\limits_{x\to 2} x - 6 = 3(2) - 6 = 0$

อย่างไรก็ตาม ถ้า $x \neq 2$ แล้วจะได้ $\dfrac{x^2-4}{3x-6} = \dfrac{(x+2)(x-2)}{3(x-2)} = \dfrac{1}{3}(x+2)$

เพราะฉะนั้น จะมี $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{3x-6} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{3}(x+2) = \dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to 2}(x+2) = \dfrac{4}{3}$

[ฟังก์ชัน $g(x) = \dfrac{x^2-4}{3x-6}$ มีลิมิตที่ $x = 2$ แม้ว่า $g(x)$ จะไม่นิยามที่ $x = 2$]

5. จงแสดงว่า $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$ ไม่มีค่า

วิธีทำ ในที่นี้ $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$ และ $H = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$

เนื่องจาก $H = 0$ ไม่สามารถใช้ทฤษฎีบท 6.2.2(2) เพื่อหาค่า $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$

โดยข้อเท็จจริง คล้ายกับที่ได้เห็นในตัวอย่าง 6.1.3(1)

ฟังก์ชัน $\varphi(x) = \dfrac{1}{x}$ ไม่มีค่าลิมิตที่ $x = 0$ ข้อสรุปนี้เหมือนกับที่ได้จากทฤษฎีบท 6.2.1

เนื่องจากฟังก์ชัน $\varphi(x) = \dfrac{1}{x}$ ไม่มีขอบเขต บนย่านใกล้เคียงของ $x = 0$

6. จงแสดงว่า ถ้า p เป็นฟังก์ชันพหุนาม แล้ว $\lim\limits_{x\to c} p(x) = p(c)$

วิธีทำ ให้ p เป็นฟังก์ชันพหุนามบน $\mathbb{R}$

ดังนั้น $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ทุก $x \in \mathbb{R}$

โดยทฤษฎีบท 6.2.2 และข้อเท็จจริง $\lim\limits_{x\to c} x^k = c^k$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to c} p(x) &= \lim_{x\to c}[a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0] \\
&= \lim_{x\to c}(a_n x^n) + \lim_{x\to c}(a_{n-1}x^{n-1}) + \ldots + \lim_{x\to c}(a_1 x) + \lim_{x\to c} a_0 \\
&= a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \ldots + a_1 c + a_0 \\
&= p(c)
\end{aligned}
$$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to c} p(x) = p(c)$ สำหรับฟังก์ชันพหุนาม p ใด ๆ

7. จงแสดงว่า สำหรับ p และ q เป็นฟังก์ชันพหุนามบน $\mathbb{R}$ และ $q(c) \neq 0$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{p(x)}{q(x)} = \dfrac{p(c)}{q(c)}$

วิธีทำ เนื่องจาก $q(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม จากทฤษฎีบทในพีชคณิต

จะได้ว่า จะมีจำนวนจริงจำนวนจำกัดอย่างมากสุด $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ โดยที่ $q(\alpha_j) = 0$

และ ถ้า $x \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ แล้ว $q(x) \neq 0$

ดังนั้น ถ้า $x \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ สามารถกำหนด $r(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$

ถ้า $q(c) \neq 0$ และจากข้อ (6) จะได้ว่า $\lim\limits_{x \to c} q(x) = q(c) \neq 0$

เพราะฉะนั้น สามารถใช้ทฤษฎีบท 6.2.2(2) เพื่อสรุป

$$\lim_{x \to c} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to c} p(x)}{\lim\limits_{x \to c} q(x)} = \frac{p(c)}{q(c)}$$

#

6.2.3 **ทฤษฎีบทอื่นๆของลิมิตฟังก์ชัน**

ทฤษฎีบท 6.2.3 และ 6.2.4 ต่อไปคล้ายคลึงโดยตรงกับทฤษฎีบท 4.2.5 และทฤษฎีบทสอดแทรก 4.2.6 ตามลำดับ

ทฤษฎีบท 6.2.3 ให้ $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ และ $c \in \mathbb{R}$ เป็นจุดลิมิตของ A

ถ้า $a \leq f(x) \leq b$ ทุก $x \in A$, $x \neq c$ และ $\lim\limits_{x \to c} f$ มีค่า

ดังนั้น $a \leq \lim\limits_{x \to c} f \leq b$

พิสูจน์ ให้ $L = \lim\limits_{x \to c} f$ ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 6.1.4 จะได้ว่า

สำหรับ (x_n) เป็นลำดับใดๆของจำนวนจริง โดยที่ $c \neq x_n \in A$ ทุก $n \in \mathbb{N}$

ถ้าลำดับ (x_n) ลู่เข้าสู่ c แล้ว ลำดับ $(f(x_n))$ ลู่เข้าสู่ L

เนื่องจาก $a \leq f(x_n) \leq b$ ทุก $n \in \mathbb{N}$ โดยทฤษฎีบท 4.2.5 จะได้ว่า $a \leq L \leq b$

นั่นคือ $a \leq \lim\limits_{x \to c} f \leq b$

#

อธิบายแนวคิดทฤษฎีบท 6.2.3 **ประกอบรูปกราฟ**

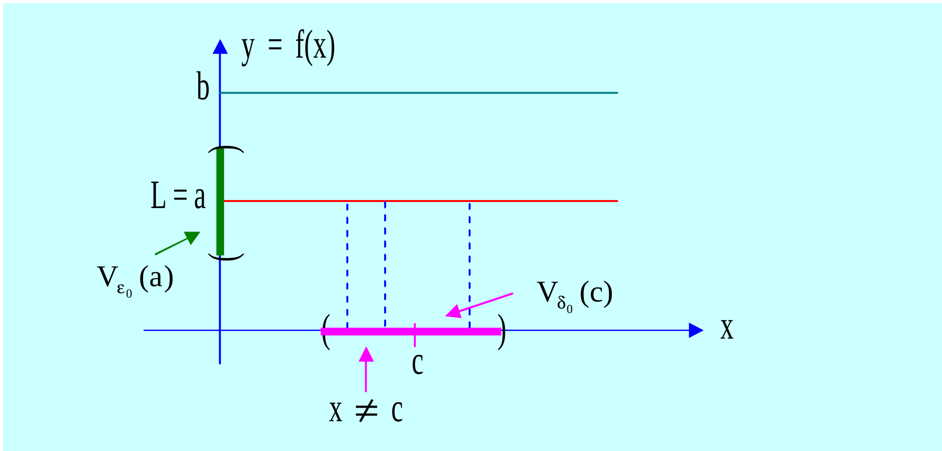
สำหรับ $a \leq f(x) \leq b$ ทุก $x \in A$, $x \neq c$ และให้ $\lim\limits_{x \to c} f = L$

พิจารณาค่า L ดังนี้

(1) $a \leq L \leq b$

ถ้าเลือก $\varepsilon = \varepsilon_0$ และมี $\delta_0 > 0$ ตามบทนิยาม 6.1.2 เขียนกราฟได้ดังนี้

1.1 L = a



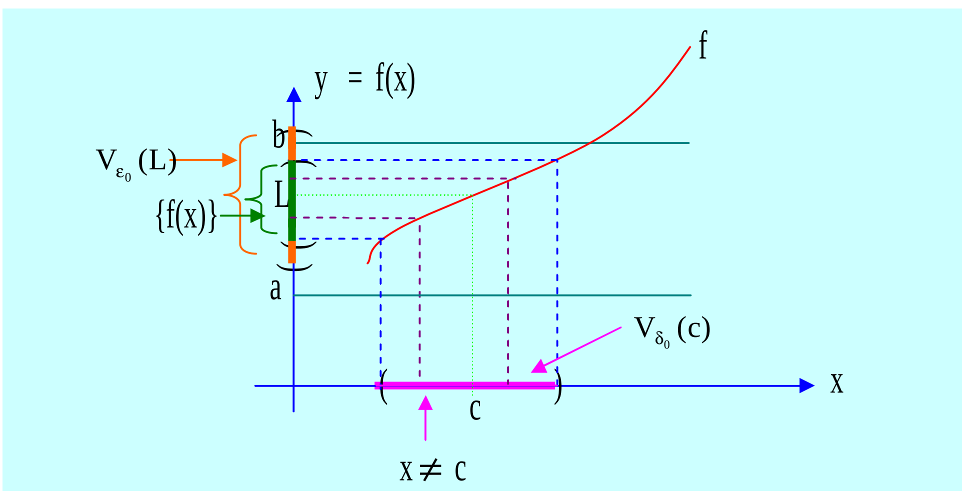
รูปที่ 6.2.4 : L = a

จะเป็นกรณี $f(x) = a$ ทุก $x \in A, x \neq c$

1.2 L = b ในทำนองเดียวกันกับข้อ 1.1

จะเป็นกรณี $f(x) = b$ ทุก $x \in A, x \neq c$

1.3 $a < L < b$

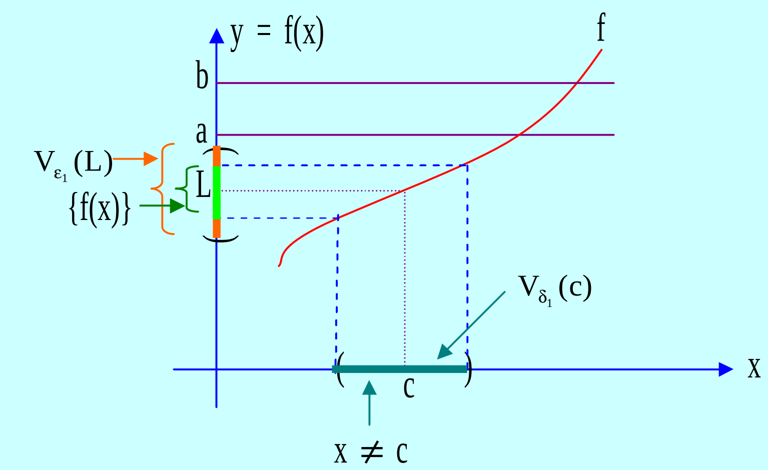


รูปที่ 6.2.5 : a < L < b

จะเห็นว่า $a < L < b$ เป็นไปได้ สอดคล้อง $|f(x) - L| < \varepsilon_0$ และ $a \leq f(x) \leq b$ ทุก $x \in A, x \neq c$ เนื่องจาก ε_0 เป็นการเลือกใด ๆ ดังนั้น แต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ตามบทนิยาม 6.1.2 จะเขียนกราฟได้ในทำนองเดียวกัน

(2) $L < a$ **หรือ** $L > b$ ถ้าเลือก $\varepsilon = \varepsilon_1$ และมี $\delta_1 > 0$ ตามบทนิยาม 6.1.2 เขียนกราฟได้ดังนี้

2.1 $L < a$



รูปที่ 6.2.6 : $L < a$

ถ้า $L < a$ สามารถเลือก $\varepsilon = \varepsilon_1$ ซึ่ง $V_{\varepsilon_1}(L) \cap [a, b] = \phi$ และ มี $\delta_1 > 0$ ที่ทำให้ มี $x \in A,\ x \neq c$ โดยที่ $f(x) < a$ จะเกิดข้อขัดแย้งกับ $a \leq f(x) \leq b$ ทุก $x \in A,\ x \neq c$

ดังนั้น $L < a$ จึงเป็นไปไม่ได้

2.2 $L > b$ กรณีนี้เป็นไปไม่ได้ สามารถพิจารณาได้ในทำนองเดียวกันกับข้อ 2.1

#

ทฤษฎีบท 6.2.4 **ทฤษฎีบทสอดแทรก**

ให้ $A \subseteq \mathbb{R}$ และ $f, g, h : A \rightarrow \mathbb{R}$ และ $c \in \mathbb{R}$ เป็นจุดลิมิตของ A

ถ้า $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ ทุก $x \in A,\ x \neq c$ และ $\lim\limits_{x \to c} f = L = \lim\limits_{x \to c} h$

ดังนั้น $\lim\limits_{x \to c} g = L$

พิสูจน์ ใช้ทฤษฎีบท 6.1.4 และ 4.2.6 จะได้ตามต้องการ

#

ตัวอย่าง 6.2.2

1. จงแสดงว่า $\lim\limits_{x \to 0} x^{\frac{3}{2}} = 0$ สำหรับ $x > 0$

วิธีทำ ให้ $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ สำหรับ $x > 0$

เนื่องจาก อสมการ $x < x^{\frac{1}{2}} \le 1$ เป็นจริง สำหรับ $0 < x \le 1$

จะได้ว่า $x^2 \le f(x) = x^{\frac{3}{2}} \le x$ สำหรับ $0 < x \le 1$

เนื่องจาก $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$ และ $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$

โดยทฤษฎีบท 6.2.4 จะได้ว่า $\lim\limits_{x \to 0} x^{\frac{3}{2}} = 0$

2. จงแสดงว่า $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$

วิธีทำ เนื่องจาก $-x \le \sin x \le x$ ทุก $x \ge 0$

และ $\lim\limits_{x \to 0} (\pm x) = 0$

โดยทฤษฎีบท 6.2.4 จะได้ว่า $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$

3. จงแสดงว่า $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$

วิธีทำ เนื่องจาก $1 - \frac{1}{2}x^2 \le \cos x \le 1$ ทุก $x \in \mathbb{R}$

และ $\lim\limits_{x \to 0} (1 - \frac{1}{2}x^2) = 1$

โดยทฤษฎีบท 6.2.4 จะได้ว่า $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$

4. จงแสดงว่า $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = 0$

วิธีทำ ไม่สามารถใช้ทฤษฎีบท 6.2.2(2) เพื่อหาค่าลิมิต เนื่องจาก $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$

อย่างไรก็ตาม จากอสมการ $1 - \frac{1}{2}x^2 \le \cos x \le 1$ ทุก $x \in \mathbb{R}$ ในข้อ (3)

จะได้ว่า $-\dfrac{1}{2}x \le \dfrac{\cos x - 1}{x} \le 0$ สำหรับ $x > 0$

และ $0 \le \dfrac{\cos x - 1}{x} \le -\dfrac{1}{2}x$ สำหรับ $x < 0$

ให้ $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{2} & \text{สำหรับ } x \ge 0 \\ 0 & \text{สำหรับ } x < 0 \end{cases}$ และ $h(x) = \begin{cases} 0 & \text{สำหรับ } x \ge 0 \\ -\dfrac{x}{2} & \text{สำหรับ } x < 0 \end{cases}$

ดังนั้น จะมี $f(x) \le \dfrac{\cos x - 1}{x} \le h(x)$ สำหรับ $x \ne 0$

เนื่องจาก $\lim\limits_{x \to 0} f = 0 = \lim\limits_{x \to 0} h$

โดยทฤษฎีบท 6.2.4 จะได้ว่า $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = 0$

5. จงแสดงว่า $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

วิธีทำ ไม่สามารถใช้ทฤษฎีบท 6.2.2(2) เพื่อหาค่าลิมิต เนื่องจาก $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$

อย่างไรก็ตาม เนื่องจาก $x - \frac{1}{6}x^3 \le \sin x \le x$ สำหรับ $x \ge 0$

และ $x \le \sin x \le x - \frac{1}{6}x^3$ สำหรับ $x \le 0$

เพราะฉะนั้น $1 - \frac{1}{6}x^2 \le \frac{\sin x}{x} \le 1$ ทุก $x \ne 0$

และเนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 0} (1 - \frac{1}{6}x^2) = 1 - \frac{1}{6}\cdot \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 1$

โดยทฤษฎีบท 6.2.4 จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

6. จงแสดงว่า $\lim\limits_{x\to 0} (x \sin \frac{1}{x}) = 0$

วิธีทำ ให้ $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ สำหรับ $x \ne 0$

เนื่องจาก $-1 \le \sin z \le 1$ ทุก $z \in \mathbb{R}$

จะมีอสมการ $-|x| \le f(x) = x \sin \frac{1}{x} \le |x|$ สำหรับทุก $x \in \mathbb{R}$ และ $x \ne 0$

เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$

โดยทฤษฎีบท 6.2.4 จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to 0} f = 0$ (สำหรับรูปกราฟ ดูรูปที่ 7.1.4)

#

อย่างไรก็ตามมีผลที่เป็นแนวขนานกับทฤษฎีบท 4.2.7 และ 4.2.8 ให้แสดงเป็นแบบฝึกหัด โดยเป็นแบบฝึกหัด 6.2 ข้อ 11, 12 ตามลำดับ

สำหรับทฤษฎีบทสุดท้ายของหัวข้อนี้ จะเป็นส่วนย่อยของทฤษฎีบท 6.2.3

ทฤษฎีบท 6.2.5 ให้ $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ และ $c \in \mathbb{R}$ เป็นจุดลิมิตของ A

(1) ถ้า $\lim\limits_{x\to c} f > 0$ แล้ว จะมีย่านใกล้เคียง $V_\delta(c)$ ของ c ซึ่ง $f(x) > 0$

สำหรับ ทุก $x \in A \cap V_\delta(c)$, $x \ne c$

(2) ถ้า $\lim\limits_{x\to c} f < 0$ แล้ว จะมีย่านใกล้เคียง $V_\delta(c)$ ของ c ซึ่ง $f(x) < 0$

สำหรับ ทุก $x \in A \cap V_\delta(c)$, $x \ne c$

พิสูจน์ (1) ให้ $L = \lim\limits_{x\to c} f$ และสมมุติ $L > 0$ ให้ $\varepsilon = \frac{1}{2}L > 0$

โดยบทนิยาม 6.1.2 จะได้ว่า จะมี $\delta > 0$ ที่ทำให้สำหรับทุก $x \in A$

ถ้า $0 < |x - c| < \delta$ แล้ว $|f(x) - L| < \frac{1}{2}L$

ดังนั้น ถ้า $x \in A \cap V_\delta(c)$ และ $x \ne c$ แล้ว $f(x) > \frac{1}{2}L > 0$

(2) พิสูจน์ในทำนองเดียวกันกับ (1) จะได้ตามต้องการ

#

สรุปแนวคิดทฤษฎีบทลิมิต

1. สำหรับ $A \subseteq \mathbb{R}$ ให้ $f : A \to \mathbb{R}$ และ $c \in \mathbb{R}$ เป็นจุดลิมิตของ A
f มีขอบเขต บนย่านใกล้เคียง ก็ต่อเมื่อ มี δ - ย่านใกล้เคียง $V_\delta(c)$ ของ c และค่าคงที่ $M > 0$ ที่ทำให้ $|f(x)| \le M$ ทุก $x \in A \cap V_\delta(c)$

2. ถ้า $A \subseteq \mathbb{R}$ และ $f : A \to \mathbb{R}$ มีลิมิตที่ $c \in \mathbb{R}$ แล้ว f มีขอบเขต
บนบางย่านใกล้เคียงของ c

3. สำหรับ $A \subseteq \mathbb{R}$ และ f, g เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง $\mathbb{R}$
 3.1 ผลบวก $f+g$ ผลต่าง $f-g$ และผลคูณ fg จาก A ไปยัง $\mathbb{R}$ กำหนดโดย
$$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$$
$$(f-g)(x) = f(x)-g(x)$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$
 สำหรับทุก $x \in A$
 3.2 ถ้า $b \in \mathbb{R}$ ผลคูณ bf เป็นฟังก์ชันกำหนดโดย $(bf)(x) = bf(x)$ ทุก $x \in A$
 3.3 ถ้า $h(x) \neq 0$ สำหรับ $x \in A$ ผลหาร $\frac{f}{h}$ เป็นฟังก์ชันกำหนดโดย
$$\frac{f}{h}(x) = \frac{f(x)}{h(x)} \quad \text{ทุก } x \in A$$

4. สำหรับ $A \subseteq \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ และ $c \in \mathbb{R}$ เป็นจุดลิมิตของ A
ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง $\mathbb{R}$
 4.1 ถ้า $\lim\limits_{x \to c} f = L$ และ $\lim\limits_{x \to c} g = M$ ดังนั้น
$$\lim_{x \to c} (f+g) = L+M$$
$$\lim_{x \to c} (f-g) = L-M$$
$$\lim_{x \to c} (fg) = LM$$
$$\lim_{x \to c} (bf) = bL$$
 4.2 ถ้า $\lim\limits_{x \to c} f = L$ และ $h : A \to \mathbb{R}$ สำหรับ $h(x) \neq 0$ ทุก $x \in A$
 โดยที่ $\lim\limits_{x \to c} h = H \neq 0$ ดังนั้น $\lim\limits_{x \to c} \frac{f}{h} = \frac{L}{H}$

5. ให้ $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ และ $c \in \mathbb{R}$ เป็นจุดลิมิตของ A
ถ้า $a \le f(x) \le b$ ทุก $x \in A$, $x \ne c$ และ $\lim\limits_{x \to c} f$ มีค่า
ดังนั้น $a \le \lim\limits_{x \to c} f \le b$

6. ให้ $A \subseteq \mathbb{R}$ และ $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ และ $c \in \mathbb{R}$ เป็นจุดลิมิตของ A
ถ้า $f(x) \le g(x) \le h(x)$ ทุก $x \in A$, $x \ne c$ และ $\lim\limits_{x \to c} f = L = \lim\limits_{x \to c} h$
ดังนั้น $\lim\limits_{x \to c} g = L$

7. ให้ $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ และ $c \in \mathbb{R}$ เป็นจุดลิมิตของ A
   7.1 ถ้า $\lim\limits_{x \to c} f > 0$ แล้ว จะมีย่านใกล้เคียง $V_\delta(c)$ ของ c ซึ่ง $f(x) > 0$
   สำหรับ ทุก $x \in A \cap V_\delta(c)$, $x \ne c$
   7.2 ถ้า $\lim\limits_{x \to c} f < 0$ แล้ว จะมีย่านใกล้เคียง $V_\delta(c)$ ของ c ซึ่ง $f(x) < 0$
   สำหรับ ทุก $x \in A \cap V_\delta(c)$, $x \ne c$

แบบฝึกหัด 6.2

1. จงหาลิมิตต่อไปนี้

   1.1 $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{\dfrac{2x+1}{x+3}}$ $(x>0)$

   1.2 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$ $(x>0)$

   1.3 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+1)^2-1}{x}$ $(x>0)$

   1.4 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ $(x>0)$

2. จงหา $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1+3x}}{x+2x^2}$ เมื่อ $x>0$

3. จงพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$ ไม่มีค่า แต่ $\lim\limits_{x\to 0}(x\cdot\cos\dfrac{1}{x}) = 0$

4. สำหรับ $A\subseteq\mathbb{R}$ และ c เป็นจุดลิมิตของ A ให้ $f,g : A\longrightarrow\mathbb{R}$
   สมมุติ f มีขอบเขต บนย่านใกล้เคียงของ c และ $\lim\limits_{x\to c} g = 0$
   จงพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{x\to c} fg = 0$

5. จงใช้บทนิยามของลิมิต เพื่อพิสูจน์ทฤษฎีบท6.2.2(1)

6. จงใช้เกณฑ์โดยลำดับของลิมิต เพื่อพิสูจน์ทฤษฎีบท6.2.2(2)

7. ให้ $n\in\mathbb{N}$ โดยที่ $n\geq 3$ จากอสมการ $-x^2\leq x^n\leq x^2$ สำหรับ $-1<x<1$
   จงแสดงว่า $\lim\limits_{x\to 0} x^n = 0$

8. สำหรับ $A\subseteq\mathbb{R}$ และ c เป็นจุดลิมิตของ A ให้ $f,g : A\longrightarrow\mathbb{R}$

   8.1 จงแสดงว่า ถ้า $\lim\limits_{x\to c} f$ และ $\lim\limits_{x\to c}(f+g)$ มีค่า แล้ว $\lim\limits_{x\to c} g$ มีค่า

   8.2 จงพิจารณาว่า ถ้า $\lim\limits_{x\to c} f$ และ $\lim\limits_{x\to c} fg$ มีค่า แล้ว $\lim\limits_{x\to c} g$ มีค่า หรือไม่

9. จงพิจารณาว่า ลิมิตต่อไปนี้มีค่าใน $\mathbb{R}$ หรือไม่

   9.1 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x^2}$ $(x\neq 0)$

   9.2 $\lim\limits_{x\to 0}(x\sin\dfrac{1}{x^2})$ $(x\neq 0)$

   9.3 $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sgn}\sin\dfrac{1}{x}$ $(x\neq 0)$

   9.4 $\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{x}\sin\dfrac{1}{x^2})$ $(x>0)$

10. ให้ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ โดยที่ $f(x+y) = f(x)+f(y)$ ทุก $x, y \in \mathbb{R}$
สมมุติ $\lim\limits_{x \to 0} f = L$ มีค่า
จงพิสูจน์ว่า $L = 0$ และ f มีลิมิตที่ทุก ๆ จุด $c \in \mathbb{R}$
[แนะนำ ; $f(2x) = f(x)+f(x) = 2f(x)$ สำหรับ $x \in \mathbb{R}$ และ $f(x) = f(x-c)+f(c)$ สำหรับ x, c ใน $\mathbb{R}$]

11. ให้ $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ และ $c \in \mathbb{R}$ เป็นจุดลิมิตของ A
ถ้า $\lim\limits_{x \to c} f$ มีค่า และ $|f|$ แทนฟังก์ชันที่กำหนดสำหรับ $x \in A$
โดยที่ $|f|(x) = |f(x)|$
จงพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{x \to c} |f| = \left| \lim\limits_{x \to c} f \right|$

12. ให้ $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ และ $c \in \mathbb{R}$ เป็นจุดลิมิตของ A และสมมุติ $f(x) \geq 0$
ทุก $x \in A$ และให้ $\sqrt{f}$ เป็นฟังก์ชันที่กำหนดสำหรับ $x \in A$
โดยที่ $(\sqrt{f})(x) = \sqrt{f(x)}$ ถ้า $\lim\limits_{x \to c} f$ มีค่า
จงพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{x \to c} \sqrt{f} = \sqrt{\lim\limits_{x \to c} f}$

6.3 ภาคขยายบางอย่างของแนวคิดลิมิต (Some Extensions of the Limit Concept)

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึง ลิมิตทางเดียว ลิมิตอนันต์ และลิมิตที่อนันต์ ซึ่งเป็นที่พบเห็นบ่อย

6.3.1 ลิมิตทางเดียว

มีหลายครั้งเมื่อฟังก์ชัน f ไม่มีลิมิตที่จุด c ลิมิตยังมีค่า เมื่อฟังก์ชันจำกัดของช่วงข้างเดียวของจุดลิมิต c

สำหรับตัวอย่าง ฟังก์ชันซิกนัมที่พิจารณาในตัวอย่าง 6.1.3(2) และแสดงให้เห็นในรูปที่ 6.1.11 ไม่มีลิมิตที่ $c = 0$ อย่างไรก็ตาม ถ้าจำกัดฟังก์ชันซิกนัม ในช่วง $(0, \infty)$ ผลของฟังก์ชันมีลิมิต 1 ที่ $c = 0$ ในทำนองเดียวกัน ถ้าจำกัดฟังก์ชันซิกนัมในช่วง $(-\infty, 0)$ ผลของฟังก์ชันมีลิมิต -1 ที่ $c = 0$ ตัวอย่างเบื้องต้นเหล่านี้ เป็นลิมิตทางขวาและลิมิตทางซ้ายที่ $c = 0$

บทนิยาม 6.3.1 สำหรับ $A \subseteq \mathbb{R}$ และให้ $f : A \to \mathbb{R}$

(1) ถ้า $c \in \mathbb{R}$ เป็นจุดลิมิตของเซต $A \cap (c, \infty) = \{x \in A \mid x > c\}$ จะกล่าวว่า $L \in \mathbb{R}$ เป็นลิมิตทางขวาของ f ที่ c ก็ต่อเมื่อ แต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ที่ทำให้สำหรับทุก $x \in A$ ถ้า $0 < x - c < \delta$ แล้ว $|f(x) - L| < \varepsilon$

เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x \to c^+} f = L$ หรือ $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = L$

(2) ถ้า $c \in \mathbb{R}$ เป็นจุดลิมิตของเซต $A \cap (-\infty, c) = \{x \in A \mid x < c\}$ จะกล่าวว่า $L \in \mathbb{R}$ เป็นลิมิตทางซ้ายของ f ที่ c ก็ต่อเมื่อ แต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ที่ทำให้สำหรับทุก $x \in A$ ถ้า $0 < c - x < \delta$ แล้ว $|f(x) - L| < \varepsilon$

เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x \to c^-} f = L$ หรือ $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = L$

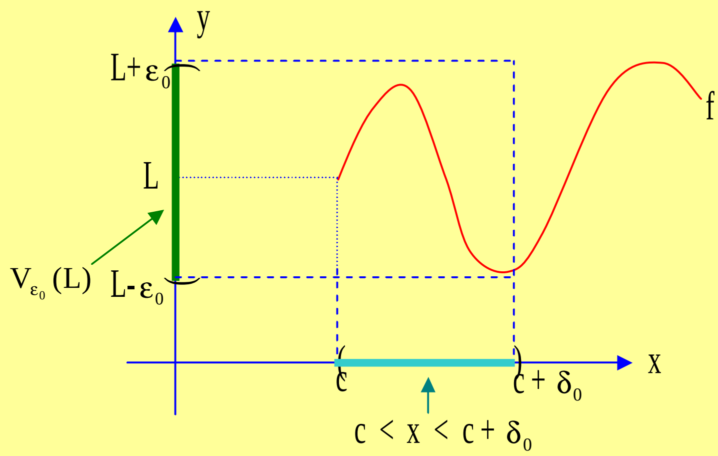
หมายเหตุ 6.3.1

(1) ลิมิต $\lim\limits_{x \to c^+} f = L$ และ $\lim\limits_{x \to c^-} f = L$ เรียกว่า ลิมิตทางเดียว (one – sided limits) ของ f ที่ c เป็นไปได้ที่ลิมิตทางเดียวทั้งสองไม่มีค่า ลิมิตทางหนึ่งมีค่าโดยอีกทางหนึ่งไม่มีค่า ลิมิตทางเดียวทั้งสองมีค่าและแตกต่างกัน

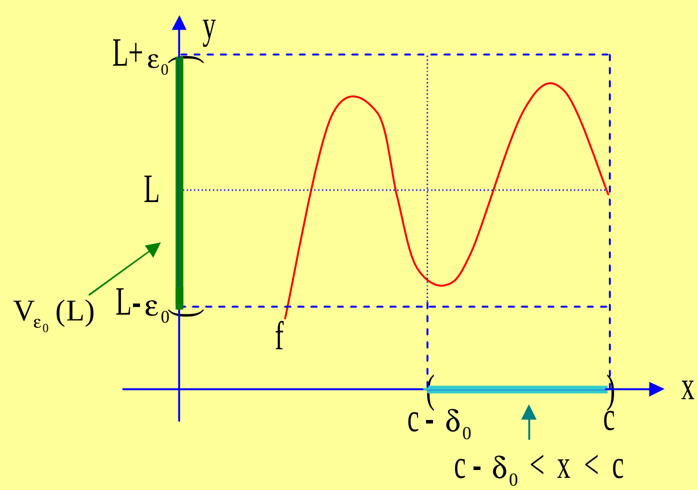
(2) ถ้า A เป็นช่วงซึ่ง c เป็นจุดปลายสุดทางซ้าย ดังนั้น $f : A \to \mathbb{R}$ มีลิมิตที่ c ก็ต่อเมื่อ f มีลิมิตทางขวาที่ c และ $\lim\limits_{x \to c} f = \lim\limits_{x \to c^+} f$

ในทำนองเดียวกัน สำหรับ A เป็นช่วงซึ่ง c เป็นจุดปลายสุดทางขวา $f : A \to \mathbb{R}$ มีลิมิตที่ c ก็ต่อเมื่อ f มีลิมิตทางซ้ายที่ c และ $\lim\limits_{x \to c} f = \lim\limits_{x \to c^-} f$

จากบทนิยาม 6.3.1 ถ้าเลือก $\varepsilon = \varepsilon_0$ และมี $\delta_0 > 0$ จะเขียนรูปกราฟประกอบได้ดังนี้



รูปที่ 6.3.1 : $\lim\limits_{x\to c^+} f = L$



รูปที่ 6.3.2 : $\lim\limits_{x\to c^-} f = L$

เนื่องจาก ε_0 เป็นการเลือกใด ๆ ดังนั้นแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ จะเขียนกราฟได้ในทำนองเดียวกัน

อย่างไรก็ตามสามารถแสดงได้ว่า f มีเพียงลิมิตทางขวา (ทางซ้าย) ที่จุด ๆ หนึ่ง มีผลคล้ายคลึงกันในหัวข้อ 6.1 และ 6.2 ลิมิตทางเดียว โดยเฉพาะอย่างยิ่ง การมีค่าของลิมิตทางเดียวสามารถพิจารณาโดยลำดับได้เช่นเดียวกัน

ทฤษฎีบท 6.3.1 ให้ $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ และ $c \in \mathbb{R}$ เป็นจุดลิมิตของเซต $A \cap (c, \infty)$ ดังนั้น ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

(1) $\lim\limits_{x \to c^+} f = L$

(2) สำหรับแต่ละลำดับ (x_n) ลู่เข้าสู่ c โดยที่ $x_n \in A$ ที่ทำให้สำหรับทุกจำนวนธรรมชาติ n ถ้า $x_n > c$ แล้ว ลำดับ $(f(x_n))$ ลู่เข้าสู่ L

พิสูจน์ พิสูจน์ในทำนองเดียวกันกับทฤษฎีบท 6.1.4

#

หมายเหตุ 6.3.2 จากทฤษฎีบท 6.3.1 สำหรับลิมิตทางซ้ายมีผลคล้ายคลึงกัน

ทฤษฎีบท 6.3.2 ให้ $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ และ $c \in \mathbb{R}$ เป็นจุดลิมิตของ $A \cap (c, \infty)$ และ $A \cap (-\infty, c)$

ดังนั้น $\lim\limits_{x \to c} f = L$ ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{x \to c^+} f = L = \lim\limits_{x \to c^-} f$

พิสูจน์ $(\Rightarrow)$ ให้ $\lim\limits_{x \to c} f = L$ ดังนั้น แต่ละ $\varepsilon > 0$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะมี $\delta > 0$ ที่ทำให้สำหรับทุก $x \in A$ ถ้า $0 < |x - c| < \delta$ แล้ว $|f(x) - L| < \varepsilon$

จะได้ว่า สำหรับแต่ละ $x \in A$ ถ้า $0 < x - c < \delta$ แล้ว $|f(x) - L| < \varepsilon$

นั่นคือ $\lim\limits_{x \to c^+} f = L$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า ถ้า $0 < c - x < \delta$ แล้ว $|f(x) - L| < \varepsilon$

นั่นคือ $\lim\limits_{x \to c^-} f = L$

$(\Leftarrow)$ ให้ $\lim\limits_{x \to c^+} f = L = \lim\limits_{x \to c^-} f$ และ $\varepsilon > 0$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ดังนั้น จะมี $\delta_1 > 0$ และ $\delta_2 > 0$

จะได้ว่า สำหรับแต่ละ $x \in A$ ถ้า $0 < x - c < \delta_1$ แล้ว $|f(x) - L| < \varepsilon$

และ ถ้า $0 < c - x < \delta_2$ แล้ว $|f(x) - L| < \varepsilon$ ให้ $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

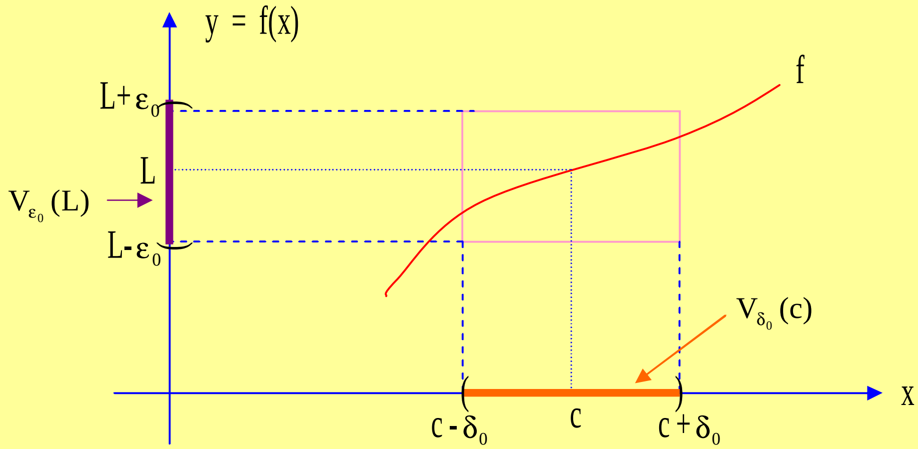
จะได้ว่า สำหรับแต่ละ $x \in A$ ถ้า $0 < |x - c| < \delta$ แล้ว $|f(x) - L| < \varepsilon$

นั่นคือ $\lim\limits_{x \to c} f = L$

#

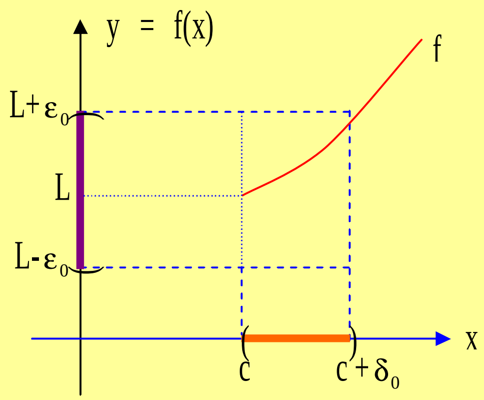
อธิบายแนวคิดทฤษฎีบท 6.3.2 ประกอบรูปกราฟ

ให้ $f : A \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ เป็นจุดลิมิตของ $A \cap (c, \infty)$ และ $A \cap (-\infty, c)$ สำหรับ $\lim\limits_{x \to c} f = L$ ถ้าเลือก $\varepsilon = \varepsilon_0$ มี $\delta_0 > 0$ ตามบทนิยาม 6.1.2 จะเขียนรูปกราฟได้ดังนี้

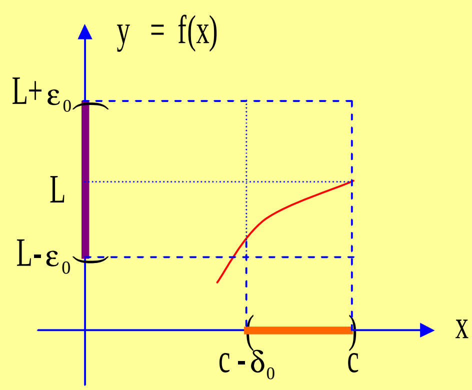


รูปที่ 6.3.3 : $\lim\limits_{x \to c} f = L$

จากรูปที่ 6.3.3 พิจารณาช่วงที่ $x \in (c, c+\delta_0)$ และ $x \in (c-\delta_0, c)$ จะได้ว่า $f(x) \in V_{\varepsilon_0}(L)$ ดังนั้น $\lim\limits_{x \to c^+} f = L$ และ $\lim\limits_{x \to c^-} f = L$ ดังรูปที่ 6.3.4 และ 6.3.5



รูปที่ 6.3.4 : $\lim\limits_{x \to c^+} f = L$



รูปที่ 6.3.5 : $\lim\limits_{x \to c^-} f = L$

เนื่องจาก ε_0 เป็นการเลือกใด ๆ ดังนั้นแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ สามารถเขียนกราฟได้ในทำนองเดียวกัน

ในทางกลับกัน ถ้า $\lim\limits_{x \to c^+} f = L = \lim\limits_{x \to c^-} f$ ก็จะได้ $\lim\limits_{x \to c} f = L$ พิจารณาได้ในทำนองเดียวกัน

#

ตัวอย่าง 6.3.1

1. จงแสดงว่า $f(x) = \operatorname{sgn} x$ ไม่มีลิมิตที่ x เข้าใกล้ 0

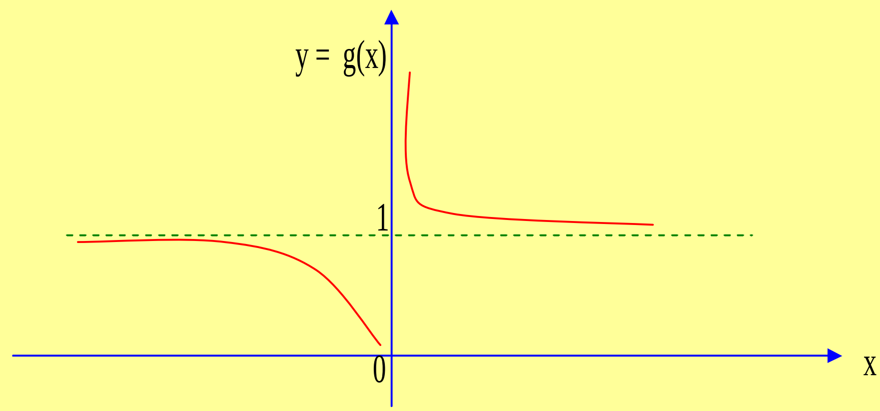
วิธีทำ โดยตัวอย่าง 6.1.3(2) เราได้ว่า sgn ไม่มีลิมิตที่ 0

เห็นได้ชัดว่า $\lim\limits_{x \to 0^+} \operatorname{sgn} x = +1$ และ $\lim\limits_{x \to 0^-} \operatorname{sgn} x = -1$

เนื่องจาก ลิมิตทางเดียวเหล่านี้แตกต่างกัน

โดยทฤษฎีบท 6.3.2 จะได้ว่า $\operatorname{sgn} x$ ไม่มีลิมิตที่ x เข้าใกล้ 0

2. จงแสดงว่า $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$ ไม่มีค่า และ $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = 0$ โดยที่ $g(x) = e^{\frac{1}{x}}$ สำหรับ $x \neq 0$ (ดังรูปที่ 6.3.6)



รูปที่ 6.3.6 : **กราฟของ** $g(x) = e^{\frac{1}{x}}$; $(x \neq 0)$

วิธีทำ ขั้นแรกจะแสดงว่า g ไม่มีลิมิตจำกัดทางขวาที่ $c = 0$ เนื่องจาก g ไม่มีขอบเขตสำหรับย่านใกล้เคียงทางขวา $(0, \delta)$ ของ 0 จะทำโดยใช้อสมการ

(6.3.1) .... $0 < t < e^t$ สำหรับ $t > 0$

โดยอสมการ (6.3.1) จะได้ว่า ถ้า $x > 0$ แล้ว $0 < \dfrac{1}{x} < e^{\frac{1}{x}}$

ดังนั้น ถ้าให้ $x_n = \dfrac{1}{n}$ จะได้ว่า $g(x_n) > n$ ทุก $n \in \mathbb{N}$

ดังนั้น $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}}$ ไม่มีค่าใน $\mathbb{R}$

ต่อไปจะแสดงว่า $\lim\limits_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$ พิจารณา ถ้า $x < 0$ และ ให้ $t = -\dfrac{1}{x}$

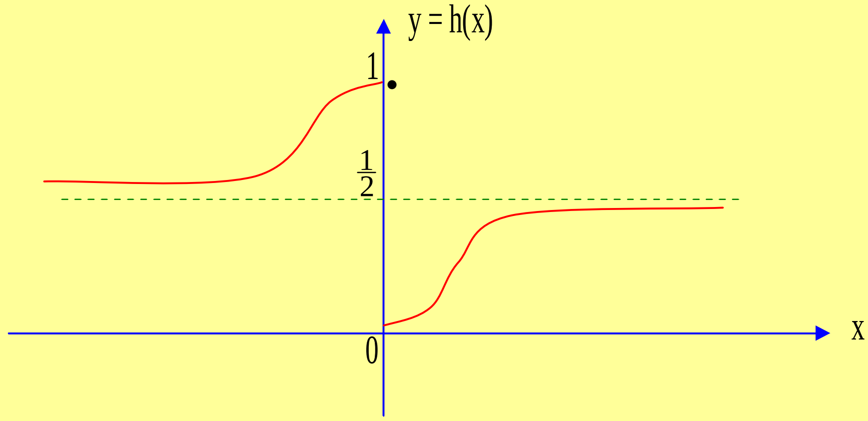
ในอสมการ (6.3.1) จะได้ว่า $0 < -\dfrac{1}{x} < e^{-\frac{1}{x}}$

เนื่องจาก $x < 0$ จะนำไปสู่ $0 < e^{\frac{1}{x}} < -x$ ทุก $x < 0$

โดยอสมการ $0 < e^{\frac{1}{x}} < -x$ จะได้ว่า $\lim\limits_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$

3. จงแสดงว่า $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = 0$ และ $\lim\limits_{x \to 0^-} h(x) = 1$ โดยที่ $h(x) = \dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$

สำหรับ $x \neq 0$ (ดังรูปที่ 6.3.7)



รูปที่ 6.3.7 : **กราฟของ** $h(x) = \dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$; $(x ^1 0)$

วิธีทำ จากข้อ (2) เราได้ว่า $0 < \dfrac{1}{x} < e^{\frac{1}{x}}$ สำหรับ $x > 0$

ดังนั้น $0 < \dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}} + 1} < \dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}}} < x$ ซึ่งจะได้ว่า $\lim\limits_{x \to 0^+} h = 0$

และจากข้อ (2) เราได้ว่า $\lim\limits_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$

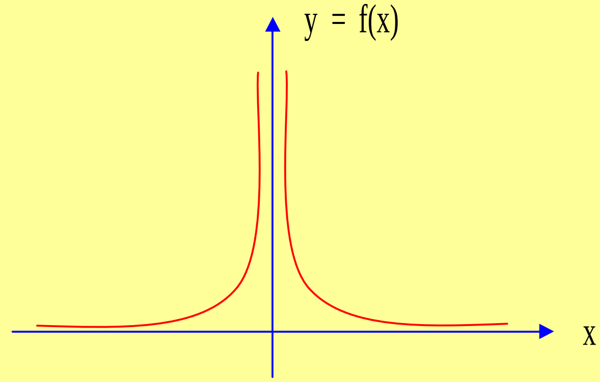
โดยข้อความที่คล้ายคลึงกันกับทฤษฎีบท 6.2.2(2) สำหรับลิมิตทางซ้าย

จะได้ว่า $\lim\limits_{x \to 0^-} \left(\dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}} + 1}\right) = \dfrac{1}{\lim\limits_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} + 1} = \dfrac{1}{0+1} = 1$

#

6.3.2 **ลิมิตอนันต์**

ฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ สำหรับ $x \neq 0$ (ดังรูปที่ 6.3.8) $f(x)$ ไม่มีขอบเขตบนย่านใกล้เคียงของ 0 ดังนั้น $f(x)$ ไม่สามารถมีลิมิตในความหมายของบทนิยาม 6.1.2 ขณะที่สัญลักษณ์ $\infty\,(+\infty)$ และ $-\infty$ ซึ่งไม่ใช่จำนวนจริง บางครั้งจะใช้ประโยชน์เพื่อกล่าวว่า " $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ เข้าสู่ ∞ เมื่อ $x \longrightarrow 0$ " ซึ่งเป็นลิมิตอนันต์(infinite limit) ของ f ดังบทนิยาม 6.3.2



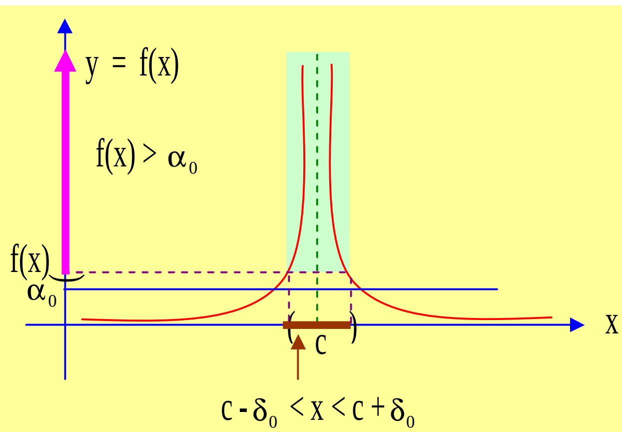
รูปที่ 6.3.8 : **กราฟของ** $f(x) = \frac{1}{x^2}$; $(x \neq 0)$

บทนิยาม 6.3.2 สำหรับ $A \subseteq \mathbb{R}$ ให้ $f : A \to \mathbb{R}$ และ $c \in \mathbb{R}$ เป็นจุดลิมิตของ A

(1) f เข้าสู่ ∞ เมื่อ $x \to c$ ก็ต่อเมื่อ แต่ละ $\alpha > 0$ จะมี $\delta = \delta(\alpha) > 0$
ที่ทำให้สำหรับทุก $x \in A$ ถ้า $0 < |x - c| < \delta$ แล้ว $f(x) > \alpha$
เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x \to c} f = \infty$

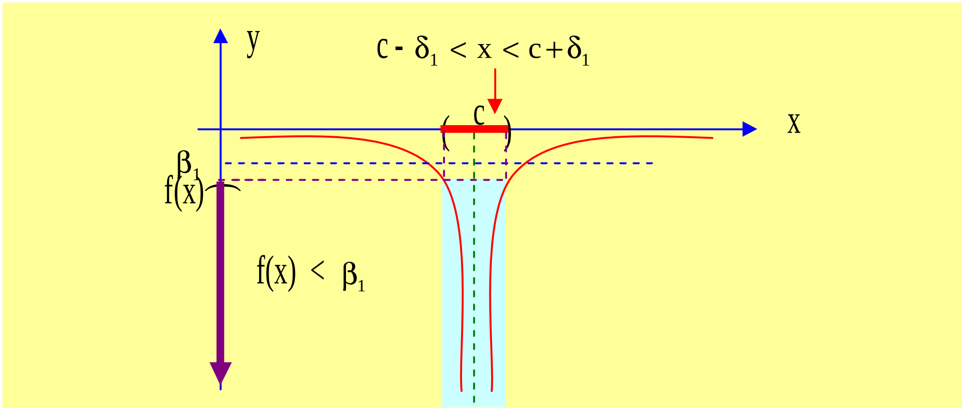
(2) f เข้าสู่ $-\infty$ เมื่อ $x \to c$ ก็ต่อเมื่อ แต่ละ $\beta < 0$ จะมี $\delta = \delta(\beta) > 0$
ที่ทำให้สำหรับทุก $x \in A$ ถ้า $0 < |x - c| < \delta$ แล้ว $f(x) < \beta$
เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x \to c} f = -\infty$

จากบทนิยาม 6.3.2 (1) ถ้าเลือก $\alpha = \alpha_0 > 0$ และมี $\delta_0 > 0$ อาจเขียนรูปกราฟประกอบได้ดังนี้



รูปที่ 6.3.9 : $\lim\limits_{x \to c} f = \infty$

จากบทนิยาม 6.3.2(2) ถ้าเลือก $\beta = \beta_1 < 0$ และมี $\delta_1 > 0$ อาจเขียนรูปกราฟประกอบได้ดังนี้



รูปที่ 6.3.10 : $\lim\limits_{x \to c} f = -\infty$

ตัวอย่าง 6.3.2

1. จงแสดงว่า $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = \infty$

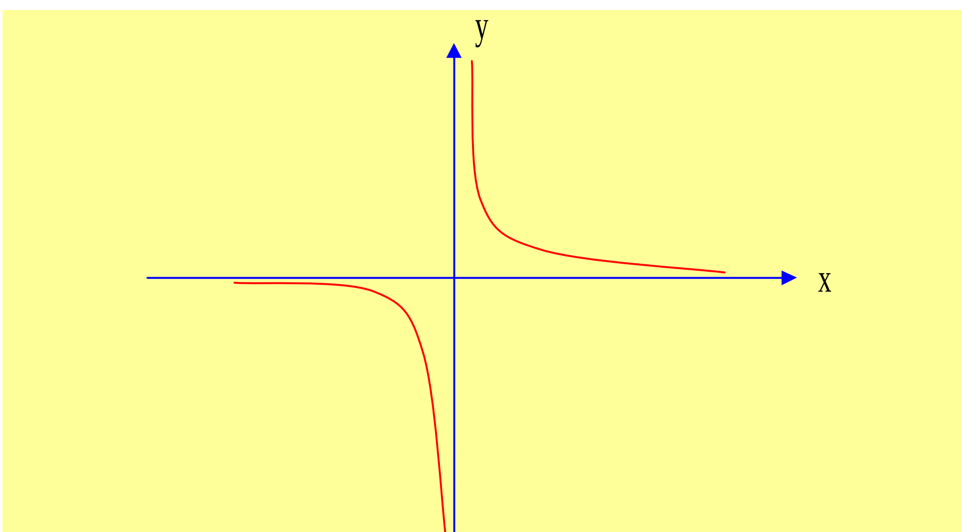
วิธีทำ สำหรับ $\alpha > 0$ ให้ $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}$

จะได้ว่า ถ้า $0 < |x| < \delta$ แล้ว $x^2 < \dfrac{1}{\alpha}$

ดังนั้น $\dfrac{1}{x^2} > \alpha$ เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = \infty$

2. ให้ $g(x) = \dfrac{1}{x}$ สำหรับ $x \neq 0$ (ดังรูปที่ 6.3.11)

จงแสดงว่า g ไม่เข้าสู่ ∞ และ $-\infty$ เมื่อ $x \longrightarrow 0$



รูปที่ 6.3.11 : **กราฟของ** $g(x) = \dfrac{1}{x}$; $(x \neq 0)$

วิธีทำ เนื่องจาก สำหรับ $\alpha > 0$ แล้ว $g(x) < \alpha$ ทุก $x < 0$

จะได้ว่า g ไม่เข้าสู่ ∞ เมื่อ $x \to 0$

ในทำนองเดียวกัน สำหรับ $\beta < 0$ แล้ว $g(x) > \beta$ ทุก $x > 0$

จะได้ว่า g ไม่เข้าสู่ $-\infty$ เมื่อ $x \to 0$

ดังนั้น g ไม่เข้าสู่ ∞ หรือ $-\infty$ เมื่อ $x \to 0$

#

ทฤษฎีบท 6.3.3 สำหรับ $A \subseteq \mathbb{R}$ ให้ $f, g : A \to \mathbb{R}$ และ $c \in \mathbb{R}$ เป็นจุดลิมิตของ A

สมมุติว่า $f(x) \le g(x)$ ทุก $x \in A$ และ $x \ne c$

(1) ถ้า $\lim\limits_{x \to c} f = \infty$ แล้ว $\lim\limits_{x \to c} g = \infty$

(2) ถ้า $\lim\limits_{x \to c} g = -\infty$ แล้ว $\lim\limits_{x \to c} f = -\infty$

พิสูจน์ (1) ถ้า $\lim\limits_{x \to c} f = \infty$ และ $\alpha > 0$

ดังนั้น จะมี $\delta(\alpha) > 0$ ที่ทำให้สำหรับทุก $x \in A$

ถ้า $0 < |x - c| < \delta(\alpha)$ แล้ว $f(x) > \alpha$

แต่เนื่องจาก $f(x) \le g(x)$ ทุก $x \in A$ และ $x \ne c$

จะได้ว่า ถ้า $0 < |x - c| < \delta(\alpha)$ แล้ว $g(x) > \alpha$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x \to c} g = \infty$

(2) พิสูจน์ทำนองเดียวกันกับข้อ (1)

#

ฟังก์ชัน $g(x) = \dfrac{1}{x}$ ในตัวอย่าง 6.3.2(2) ก่อให้เกิดแนวคิดเพื่อพิจารณาลิมิตอนันต์ทางเดียว

บทนิยาม 6.3.3 สำหรับ $A \subseteq \mathbb{R}$ และ $f : A \to \mathbb{R}$

(1) ถ้า $c \in \mathbb{R}$ เป็นจุดลิมิตของ $A \cap (c, \infty) = \{x \in A \mid x > c\}$

จะกล่าวว่า f เข้าสู่ ∞ เมื่อ $x \to c^{+}$ ก็ต่อเมื่อ แต่ละ $\alpha > 0$ จะมี

$\delta = \delta(\alpha) > 0$ ที่ทำให้สำหรับทุก $x \in A$ ถ้า $0 < x - c < \delta$ แล้ว $f(x) > \alpha$

เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x \to c^{+}} f = \infty$

จะกล่าวว่า f เข้าสู่ $-\infty$ เมื่อ $x \to c^{+}$ ก็ต่อเมื่อ แต่ละ $\beta < 0$ จะมี

$\delta = \delta(\beta) > 0$ ที่ทำให้สำหรับทุก $x \in A$ ถ้า $0 < x - c < \delta$ แล้ว $f(x) < \beta$

เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x \to c^{+}} f = -\infty$

(2) ถ้า $c \in \mathbb{R}$ เป็นจุดลิมิตของ $A \cap (-\infty, c) = \{x \in A \mid x < c\}$

จะกล่าวว่า f เข้าสู่ ∞ เมื่อ $x \to c^-$ ก็ต่อเมื่อ แต่ละ $\alpha > 0$ จะมี

$\delta = \delta(\alpha) > 0$ ที่ทำให้สำหรับทุก $x \in A$ ถ้า $0 < c - x < \delta$ แล้ว $f(x) > \alpha$

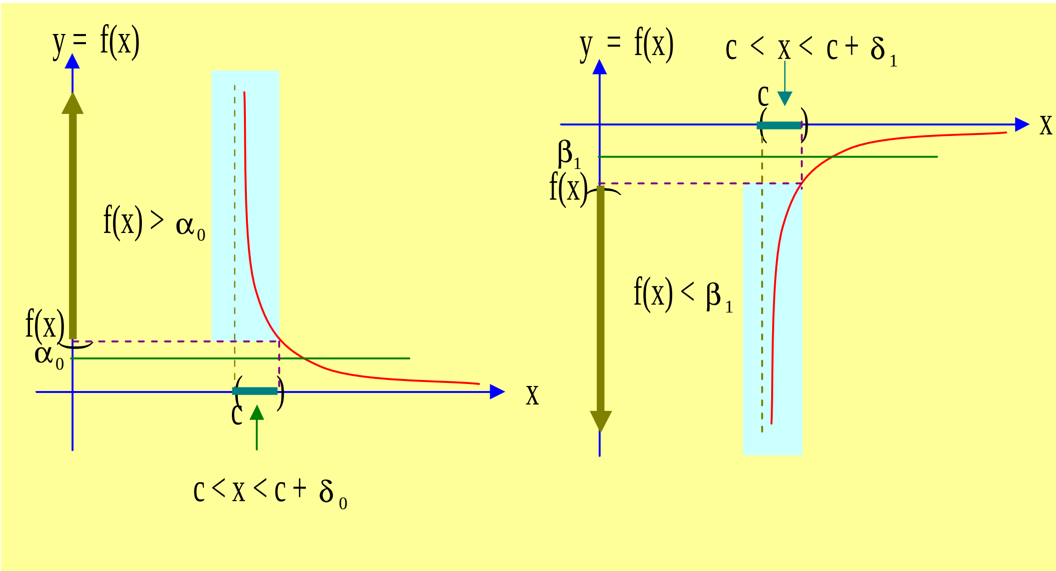
เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x \to c^-} f = \infty$

จะกล่าวว่า f เข้าสู่ $-\infty$ เมื่อ $x \to c^-$ ก็ต่อเมื่อ แต่ละ $\beta < 0$ จะมี

$\delta = \delta(\beta) > 0$ ที่ทำให้สำหรับทุก $x \in A$ ถ้า $0 < c - x < \delta$ แล้ว $f(x) < \beta$

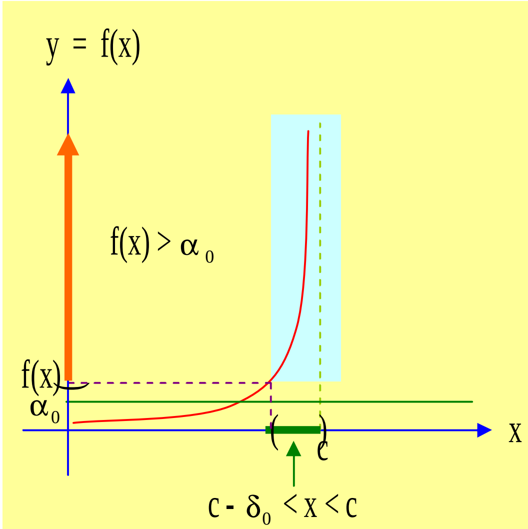
เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x \to c^-} f = -\infty$

จากบทนิยาม 6.3.3(1) ถ้าเลือก $\alpha = \alpha_0 > 0$ และมี $\delta_0 > 0$ และ ถ้าเลือก $\beta = \beta_1 < 0$ และมี $\delta_1 > 0$ อาจเขียนรูปกราฟประกอบได้ดังนี้

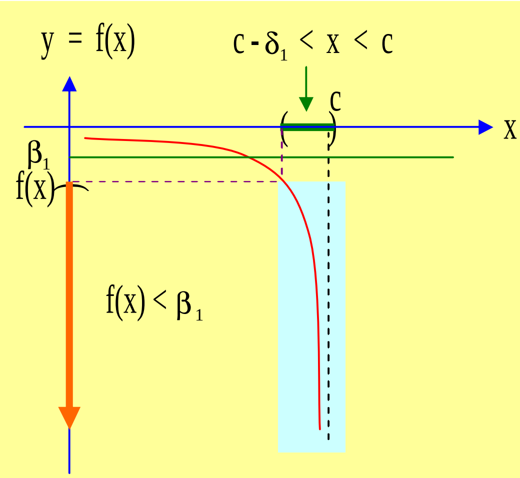


รูปที่ 6.3.12 : $\lim\limits_{x \to c^+} f = \infty$ **รูปที่** 6.3.13 : $\lim\limits_{x \to c^+} f = -\infty$

จากบทนิยาม 6.3.3(2) ถ้าเลือก $\alpha = \alpha_0 > 0$ และมี $\delta_0 > 0$ และ ถ้าเลือก $\beta = \beta_1 < 0$ และมี $\delta_1 > 0$ อาจเขียนรูปกราฟประกอบได้ดังนี้



รูปที่ 6.3.14 : $\lim\limits_{x \to c-} f = \infty$



รูปที่ 6.3.15 : $\lim\limits_{x \to c^-} f = -\infty$

ตัวอย่าง 6.3.3

1. ให้ $g(x) = \dfrac{1}{x}$ สำหรับ $x \neq 0$

   จงแสดงว่า $\lim\limits_{x \to 0^+} g = \infty$ และ $\lim\limits_{x \to 0^-} g = -\infty$

วิธีทำ โดยตัวอย่าง 6.3.2(2) เราได้ว่า $\lim\limits_{x \to 0} g$ ไม่มีค่า

อย่างไรก็ตาม โดยวิธีการในตัวอย่าง 6.3.2(2)

สามารถแสดงว่า $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = \infty$ และ $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$

2. จงแสดงว่า $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \infty$ ตามความหมายของบทนิยาม 6.3.3

วิธีทำ โดยตัวอย่าง 6.3.1(2) เราได้ว่า ลิมิตทางขวาของ $e^{\frac{1}{x}}$ เมื่อ $x \longrightarrow 0^+$ ไม่มีค่า

ในความหมายของบทนิยาม 6.3.1(1)

อย่างไรก็ตาม เนื่องจาก $\dfrac{1}{x} < e^{\frac{1}{x}}$ สำหรับ $x > 0$ และ $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = \infty$

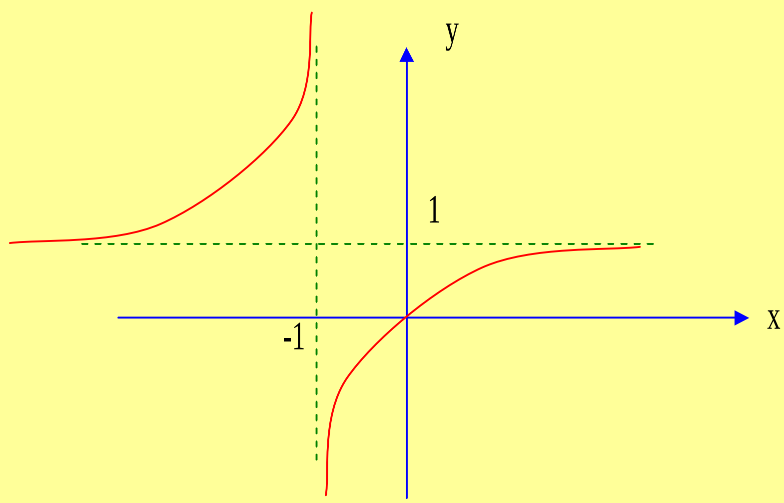
ดังนั้น $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \infty$ ในความหมายของบทนิยาม 6.3.3

#

6.3.3 ลิมิตที่อนันต์

ลิมิตที่อนันต์ (limit at infinity) เป็นที่ต้องการเพื่อนิยามแนวคิดของฟังก์ชันเมื่อ $x \to \infty$ และ $x \to -\infty$

พิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ ถ้า $x \neq -1$ จะได้กราฟดังรูปที่ 6.3.16



รูปที่ 6.3.16 : $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

จะเห็นว่า เมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้น (หรือลดลง) โดยไม่มีขอบเขต แล้วค่าของ f(x) จะลู่เข้าสู่ 1 จะเขียน $x \to \infty$ แทน x เพิ่มขึ้นไม่มีขอบเขต ($x \to -\infty$ แทน x ลดลงโดยไม่มีขอบเขต) สำหรับ $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ จะกล่าวได้ว่า ลิมิตของ f เท่ากับ 1 เมื่อ $x \to \infty$ หรือ $x \to -\infty$ ดังบทนิยามลิมิตที่อนันต์ต่อไปนี้

บทนิยาม 6.3.4 สำหรับ $A \subseteq \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$ ให้ $f : A \to \mathbb{R}$

(1) สำหรับ $(a, \infty) \subseteq A$ บาง $a \in \mathbb{R}$

L เป็นลิมิตของ f เมื่อ $x \to \infty$ ก็ต่อเมื่อ แต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $K = K(\varepsilon) > 0$ ที่ทำให้สำหรับทุก $x \in A$ ถ้า $x > K$ แล้ว $|f(x) - L| < \varepsilon$

เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x \to \infty} f = L$ หรือ $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$

(2) สำหรับ $(-\infty, a) \subseteq A$ บาง $a \in \mathbb{R}$

L เป็นลิมิตของ f เมื่อ $x \to -\infty$ ก็ต่อเมื่อ แต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $K = K(\varepsilon) < 0$ ที่ทำให้สำหรับทุก $x \in A$ ถ้า $x < K$ แล้ว $|f(x) - L| < \varepsilon$

เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x \to -\infty} f = L$ หรือ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$

ต่อไปจะแสดงลิมิตของ f เมื่อ $x \to \pm\infty$ มีค่าเดียวกัน เมื่อใดก็ตามที่ลิมิตมีค่า เหมือนมีเกณฑ์โดยลำดับสำหรับลิมิตเหล่านี้ เพียงแต่เป็นเกณฑ์ เมื่อ $x \to \infty$ และ $x \to -\infty$ จะใช้แนวคิดลิมิตของสมบัติเฉพาะลำดับลู่ออก (บทนิยาม 4.6.1)

ทฤษฎีบท 6.3.4 ให้ $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ และ $(a, \infty) \subseteq A$ บาง $a \in \mathbb{R}$

ดังนั้น ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

(1) $\lim\limits_{x \to \infty} f = L$

(2) สำหรับแต่ละลำดับ (x_n) ใน (a, ∞) โดยที่ $\lim (x_n) = \infty$ แล้ว ลำดับ $(f(x_n))$ ลู่เข้าสู่ L

พิสูจน์ $(1) \Rightarrow (2)$

ให้ $\lim\limits_{x \to \infty} f = L$ และ (x_n) เป็นลำดับใน (a, ∞) ซึ่ง $\lim (x_n) = \infty$

จะแสดงว่า ลำดับ $(f(x_n))$ ลู่เข้าสู่ L

ให้ $\varepsilon > 0$ โดยบทนิยาม 6.3.4(1) จะมี $\delta > 0$ ที่ทำให้สำหรับทุก $x \in A$

ถ้า $x > \delta$ แล้ว $|f(x) - L| < \varepsilon$ และเนื่องจาก $\lim (x_n) = \infty$ และ $\delta > 0$

ดังนั้น จะมีจำนวนธรรมชาติ $K(\delta)$ ที่ทำให้สำหรับทุกจำนวนธรรมชาติ n

ถ้า $n \geq K(\delta)$ แล้ว $x_n > \delta$ จะได้ว่า สำหรับแต่ละ x_n จะมี $|f(x_n) - L| < \varepsilon$

นั่นคือ แต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนธรรมชาติ K ที่ทำให้สำหรับทุกจำนวนธรรมชาติ n

ถ้า $n \geq K$ แล้ว $|f(x_n) - L| < \varepsilon$

เพราะฉะนั้น ลำดับ $(f(x_n))$ ลู่เข้าสู่ L

$(2) \Rightarrow (1)$

สมมุติว่า $\lim\limits_{x \to \infty} f \neq L$ ดังนั้น จะมี $\varepsilon_0 > 0$ สำหรับแต่ละ $\delta > 0$ จะมี $x_\delta \in A$

ซึ่ง $x_\delta > \delta$ แต่ $|f(x_\delta) - L| \geq \varepsilon_0$

ดังนั้น ทุกจำนวนธรรมชาติ n จะมี $x_n \in A$ ซึ่ง $x_n > \delta$ แต่ $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon_0$

จากสมมุติฐานของบทกลับ เรามี ลำดับ $(f(x_n))$ ลู่เข้าสู่ L

ดังนั้น จะมีจำนวนธรรมชาติ K ที่ทำให้สำหรับทุกจำนวนธรรมชาติ n

ถ้า $n \geq K$ แล้ว $|f(x_n) - L| < \varepsilon_0$ ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $\lim\limits_{x \to \infty} f \neq L$ จึงเป็นไปไม่ได้

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x \to \infty} f = L$

#

ทฤษฎีบท 6.3.5 ให้ $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ และ $(-\infty, a) \subseteq A$ บาง $a \in \mathbb{R}$
ดังนั้น ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

(1) $\lim\limits_{x \to -\infty} f = L$

(2) สำหรับแต่ละลำดับ (x_n) ใน $(-\infty, a)$ โดยที่ $\lim(x_n) = -\infty$ แล้ว ลำดับ $(f(x_n))$ ลู่เข้าสู่ L

พิสูจน์ พิสูจน์ในทำนองเดียวกันกับทฤษฎีบท 6.3.4

#

ตัวอย่าง 6.3.4

1. ให้ $g(x) = \dfrac{1}{x}$ สำหรับ $x \neq 0$
จงพิจารณาว่า g ลู่เข้าสู่ 0 เมื่อ $x \to \infty$ และ $x \to -\infty$

วิธีทำ จะแสดงว่า $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0$

ให้ $\varepsilon > 0$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ เลือก $K = \dfrac{1}{\varepsilon}$

ดังนั้น สำหรับจำนวนจริง x ซึ่ง $x > K$ จะได้ว่า $\left|\dfrac{1}{x} - 0\right| = \dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{K} = \varepsilon$

นั่นคือ $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0$

สำหรับ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ แสดงได้ในทำนองเดียวกัน

2. ให้ $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ สำหรับ $x \neq 0$ จงพิจารณาว่า $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$

วิธีทำ สามารถแสดงได้ว่า $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x^2} = 0 = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2}$ (รูปที่ 6.3.8)

วิธีการหนึ่งสามารถแสดงได้ดังนี้ ; ถ้า $x \geq 1$ แล้ว $0 \leq \dfrac{1}{x^2} \leq \dfrac{1}{x}$

และเนื่องจาก $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0$ ดังนั้น $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$

#

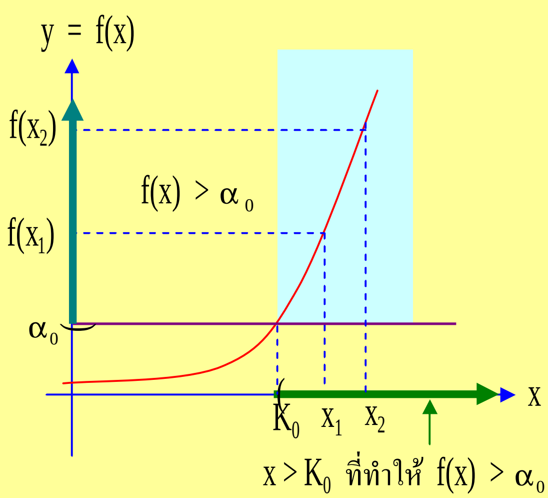
บทนิยาม 6.3.5 สำหรับ $A \subseteq \mathbb{R}$ ให้ $f : A \to \mathbb{R}$ และ $(a, \infty) \subseteq A$ บาง $a \in \mathbb{R}$

(1) f เข้าสู่ ∞ เมื่อ $x \to \infty$ ก็ต่อเมื่อ แต่ละ $\alpha > 0$ จะมี $K = K(\alpha) > 0$
ที่ทำให้สำหรับทุก $x \in A$ ถ้า $x > K$ แล้ว $f(x) > \alpha$
เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x \to \infty} f = \infty$

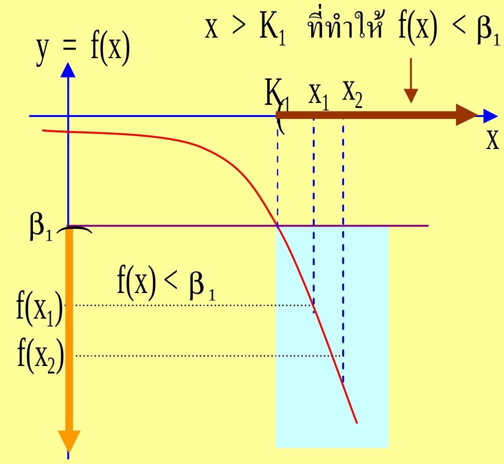
(2) f เข้าสู่ $-\infty$ เมื่อ $x \longrightarrow \infty$ ก็ต่อเมื่อ แต่ละ $\beta < 0$ จะมี $K = K(\beta) > 0$ ที่ทำให้สำหรับทุก $x \in A$ ถ้า $x > K$ แล้ว $f(x) < \beta$

เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x \to \infty} f = -\infty$

จากบทนิยาม 6.3.5 ถ้าเลือก $\alpha = \alpha_0$ และมี $K_0 > 0$ และ ถ้าเลือก $\beta = \beta_1$ และมี $K_1 > 0$ อาจเขียนรูปกราฟประกอบได้ดังนี้



รูปที่ 6.3.17 : $\lim\limits_{x \to \infty} f = \infty$



รูปที่ 6.3.18 : $\lim\limits_{x \to \infty} f = -\infty$

บทนิยาม 6.3.6 สำหรับ $A \subseteq \mathbb{R}$ ให้ $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ และ $(-\infty, a) \subseteq A$ บาง $a \in \mathbb{R}$

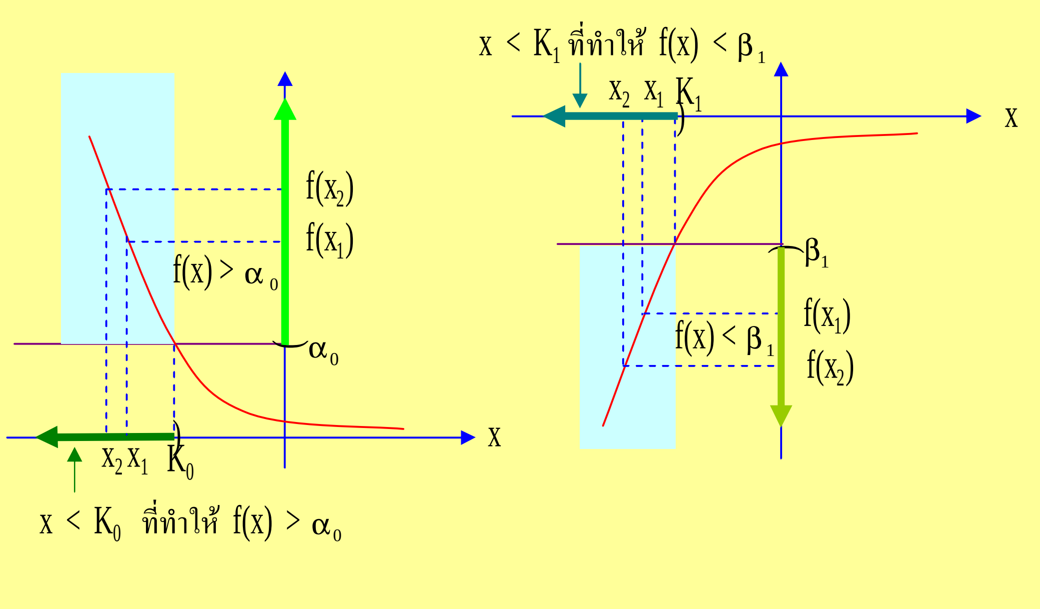
(1) f เข้าสู่ ∞ เมื่อ $x \longrightarrow -\infty$ ก็ต่อเมื่อ แต่ละ $\alpha > 0$ จะมี $K = K(\alpha) < 0$ ที่ทำให้สำหรับทุก $x \in A$ ถ้า $x < K$ แล้ว $f(x) > \alpha$

เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x \to -\infty} f = \infty$

(2) f เข้าสู่ $-\infty$ เมื่อ $x \longrightarrow -\infty$ ก็ต่อเมื่อ แต่ละ $\beta < 0$ จะมี $K = K(\beta) < 0$ ที่ทำให้สำหรับทุก $x \in A$ ถ้า $x < K$ แล้ว $f(x) < \beta$

เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x \to -\infty} f = -\infty$

จากบทนิยาม 6.3.6 ถ้าเลือก $\alpha = \alpha_0$ และมี $K_0 < 0$ และ ถ้าเลือก $\beta = \beta_1$ และมี $K_1 < 0$ อาจเขียนรูปกราฟประกอบได้ดังนี้



รูปที่ 6.3.19 : $\lim\limits_{x\to-\infty} f = \infty$ **รูปที่** 6.3.20 : $\lim\limits_{x\to-\infty} f = -\infty$

อย่างไรก็ตามเหมือนกับตอนก่อนนี้สามารถใช้เกณฑ์โดยลำดับได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 6.3.6 ให้ $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ และ $(a, \infty) \subseteq A$ บาง $a \in \mathbb{R}$

ดังนั้น ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} f = \infty$

(2) สำหรับแต่ละลำดับ (x_n) ใน (a, ∞) โดยที่ $\lim(x_n) = \infty$ แล้ว $\lim(f(x_n)) = \infty$

พิสูจน์ $(1) \Longrightarrow (2)$

ให้ $\lim\limits_{x\to\infty} f = \infty$ และ (x_n) เป็นลำดับใน (a, ∞) ซึ่ง $\lim(x_n) = \infty$

จะแสดงว่า $\lim(f(x_n)) = \infty$

ให้ $\alpha > 0$ โดยบทนิยาม 6.3.5(1) จะมี $\delta(\alpha) > 0$ ที่ทำให้สำหรับทุก $x \in A$

ถ้า $x > \delta$ แล้ว $f(x) > \alpha$ และเนื่องจาก $\lim(x_n) = \infty$ และ $\delta > 0$

ดังนั้น จะมีจำนวนธรรมชาติ $K(\delta)$ ที่ทำให้ทุกจำนวนธรรมชาติ n

ถ้า $n \geq K(\delta)$ แล้ว $x_n > \delta$ จะได้ว่า สำหรับแต่ละ x_n จะมี $f(x_n) > \alpha$

นั่นคือ แต่ละ $\alpha > 0$ จะมีจำนวนธรรมชาติ $K(\delta)$ ที่ทำให้ทุกจำนวนธรรมชาติ n

ถ้า $n \geq K(\delta)$ แล้ว $f(x_n) > \alpha$

เพราะฉะนั้น $\lim(f(x_n)) = \infty$

$(2) \Rightarrow (1)$

สมมุติว่า $\lim\limits_{x \to \infty} f \neq \infty$ ดังนั้น จะมี $\alpha_0 > 0$ สำหรับแต่ละ $\delta > 0$

จะมี $x_\delta \in A$ ซึ่ง $x_\delta > \delta$ แต่ $f(x_\delta) \leq \alpha_0$

ดังนั้น ทุกจำนวนธรรมชาติ n จะมี $x_n \in A$ ซึ่ง $x_n > \delta$ แต่ $f(x_n) \leq \alpha_0$

จากสมมุติฐานของบทกลับ เรามี $\lim(f(x_n)) = \infty$

ดังนั้น จะมีจำนวนธรรมชาติ K ที่ทำให้สำหรับทุกจำนวนธรรมชาติ n

ถ้า $n \geq K$ แล้ว $f(x_n) > \alpha_0$ เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $\lim\limits_{x \to \infty} f \neq \infty$ จึงเป็นไปไม่ได้

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x \to \infty} f = \infty$

#

หมายเหตุ 6.3.3 จากทฤษฎีบท 6.3.6 สำหรับ $\lim\limits_{x \to \infty} f = -\infty$ จะได้ในทำนองเดียวกัน

นั่นคือ $\lim\limits_{x \to \infty} f = -\infty$ ก็ต่อเมื่อ แต่ละลำดับ (x_n) ใน (a, ∞) โดยที่ $\lim(x_n) = \infty$

แล้ว $\lim(f(x_n)) = -\infty$

ทฤษฎีบท 6.3.7 ให้ $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ และ $(-\infty, a) \subseteq A$ บาง $a \in \mathbb{R}$

ดังนั้น ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

(1) $\lim\limits_{x \to -\infty} f = \infty$

(2) สำหรับแต่ละลำดับ (x_n) ใน $(-\infty, a)$ โดยที่ $\lim(x_n) = -\infty$ แล้ว $\lim(f(x_n)) = \infty$

พิสูจน์ พิสูจน์ในทำนองเดียวกันกับทฤษฎีบท 6.3.6

#

หมายเหตุ 6.3.4 จากทฤษฎีบท 6.3.7 สำหรับ $\lim\limits_{x \to -\infty} f = -\infty$ จะได้ในทำนองเดียวกัน

นั่นคือ $\lim\limits_{x \to -\infty} f = -\infty$ ก็ต่อเมื่อ แต่ละลำดับ(x_n) ใน $(-\infty, a)$ โดยที่ $\lim(x_n) = -\infty$

แล้ว $\lim(f(x_n)) = -\infty$

ทฤษฎีบท 6.3.8 สำหรับ $A \subseteq \mathbb{R}$ ให้ $f, g : A \to \mathbb{R}$ และ $(a, \infty) \subseteq A$ บาง $a \in \mathbb{R}$

สมมุติว่า $f(x) \leq g(x)$ ทุก x ใน (a, ∞)

(1) ถ้า $\lim\limits_{x \to \infty} f = \infty$ แล้ว $\lim\limits_{x \to \infty} g = \infty$

(2) ถ้า $\lim\limits_{x \to \infty} g = -\infty$ แล้ว $\lim\limits_{x \to \infty} f = -\infty$

พิสูจน์ (1) ให้ $\lim\limits_{x \to \infty} f = \infty$ และ $\alpha > 0$

ดังนั้น จะมี $K(\alpha) > 0$ ที่ทำให้สำหรับทุก $x \in A$

ถ้า $x > K(\alpha)$ แล้ว $f(x) > \alpha$

แต่เนื่องจาก $f(x) \leq g(x)$ ทุก x ใน (a, ∞)

ดังนั้น จะมี $a_1 > K$ และ $a_1 > a$ ซึ่งทำให้ $x > a_1 > K$ แล้ว $f(x) > \alpha$

จะได้ว่า ถ้า $x > a_1 > K$ แล้ว $g(x) > \alpha$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x \to \infty} g = \infty$

(2) พิสูจน์ทำนองเดียวกันกับข้อ (1)

#

ทฤษฎีบท 6.3.9 สำหรับ $A \subseteq \mathbb{R}$ ให้ $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ และ $(-\infty, a) \subseteq A$ บาง $a \in \mathbb{R}$

สมมุติว่า $f(x) \leq g(x)$ ทุก x ใน $(-\infty, a)$

(1) ถ้า $\lim\limits_{x \to -\infty} f = \infty$ แล้ว $\lim\limits_{x \to -\infty} g = \infty$

(2) ถ้า $\lim\limits_{x \to -\infty} g = -\infty$ แล้ว $\lim\limits_{x \to -\infty} f = -\infty$

พิสูจน์ พิสูจน์ในทำนองเดียวกันกับทฤษฎีบท 6.3.8

#

ทฤษฎีบทต่อไปคล้ายกับทฤษฎีบท 4.6.3

ทฤษฎีบท 6.3.10 สำหรับ $A \subseteq \mathbb{R}$ ให้ $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ และ $(a, \infty) \subseteq A$ บาง $a \in \mathbb{R}$

สมมุติว่า $g(x) > 0$ ทุก $x > a$ และบาง $L \in \mathbb{R}$, $L \neq 0$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

(1) สำหรับ $L > 0$ ดังนั้น $\lim\limits_{x \to \infty} f = \infty$ ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{x \to \infty} g = \infty$

(2) สำหรับ $L < 0$ ดังนั้น $\lim\limits_{x \to \infty} f = -\infty$ ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{x \to \infty} g = \infty$

พิสูจน์ (1) จากสมมุติฐาน $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$

โดยบทนิยาม 6.3.4 จะได้ว่า แต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $K > 0$ ที่ทำให้สำหรับทุก $x \in A$

ถ้า $x > K$ แล้ว $\left| \dfrac{f(x)}{g(x)} - L \right| < \varepsilon$ และเนื่องจาก $L > 0$ เลือก $\varepsilon = \dfrac{L}{2} > 0$

จะได้ว่า $0 < \dfrac{1}{2}L < \dfrac{f(x)}{g(x)} < \dfrac{3}{2}L$ สำหรับ $x > K$

ดังนั้น จะมี $a_1 > K$ และ $a_1 > a$ ที่ทำให้ $\dfrac{1}{2}L < \dfrac{f(x)}{g(x)} < \dfrac{3}{2}L$ ทุก $x > a_1$

จะได้ว่า $(\dfrac{1}{2}L)g(x) < f(x) < (\dfrac{3}{2}L)g(x)$ ทุก $x > a_1$

เนื่องจาก $\lim\limits_{x \to \infty} f = \infty$, $L > 0$ และ $g(x) > 0$

โดยประยุกต์ทฤษฎีบท 6.3.8(1) จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to\infty} g = \infty$

(2) พิสูจน์ในทำนองเดียวกันกับข้อ (1)

#

ทฤษฎีบท 6.3.11 สำหรับ $A \subseteq \mathbb{R}$ ให้ $f, g : A \to \mathbb{R}$ และ $(-\infty, a) \subseteq A$ บาง $a \in \mathbb{R}$ สมมุติว่า $g(x) > 0$ ทุก $x < a$ และบาง $L \in \mathbb{R}$, $L \neq 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$

(1) สำหรับ $L > 0$ ดังนั้น $\lim\limits_{x\to-\infty} f = \infty$ ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{x\to-\infty} g = \infty$

(2) สำหรับ $L < 0$ ดังนั้น $\lim\limits_{x\to-\infty} f = -\infty$ ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{x\to-\infty} g = \infty$

พิสูจน์ พิสูจน์ในทำนองเดียวกันกับทฤษฎีบท 6.3.10

#

ตัวอย่าง 6.3.5

1. จงแสดงว่า $\lim\limits_{x\to\infty} x^n = \infty$ สำหรับ $n \in \mathbb{N}$

วิธีทำ ให้ $g(x) = x^n$ สำหรับ $x \in (0, \infty)$ กำหนด $\alpha > 0$

ให้ $K = \sup\{1, \alpha\}$ ดังนั้น ทุก $x > K$ จะมี $g(x) = x^n \geq x > \alpha$

เนื่องจาก $\alpha > 0$ เป็น α ใด ๆ จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to\infty} g = \infty$

2. จงแสดงว่า $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = \infty$ สำหรับ $n \in \mathbb{N}$ ซึ่ง n เป็นเลขคู่ และ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$ สำหรับ $n \in \mathbb{N}$ ซึ่ง n เป็นเลขคี่

วิธีทำ กรณี n เป็นเลขคี่ ; $n = 2k+1$ ซึ่ง $k = 0, 1, \ldots$

ให้ $\beta < 0$, $K = \inf\{\beta, -1\}$ สำหรับ $x < K$

ดังนั้น เนื่องจาก $(x^2)^k \geq 1$ จะมี $x^n = (x^2)^k x \leq x < \beta$

เนื่องจาก $\beta < 0$ เป็น β ใด ๆ จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$

สำหรับกรณี n เป็นเลขคู่ ให้แสดงเป็นแบบฝึกหัด

3. ให้ $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

จงหาค่า $\lim\limits_{x\to\infty} p$ เมื่อ $a_n > 0$ และ $a_n < 0$ ตามลำดับ

วิธีทำ ให้ $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ และ $g(x) = x^n$

เนื่องจาก $\dfrac{p(x)}{g(x)} = a_n + a_{n-1}\left(\dfrac{1}{x}\right) + \ldots + a_1\left(\dfrac{1}{x^{n-1}}\right) + a_0\left(\dfrac{1}{x^n}\right)$

จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{p(x)}{g(x)} = a_n$ และเนื่องจาก $\lim\limits_{x\to\infty} g = \infty$

โดยทฤษฎีบท 6.3.10(1) จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to\infty} p = \infty$ สำหรับ $a_n > 0$

และโดยทฤษฎีบท 6.3.10(2) จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to\infty} p = -\infty$ สำหรับ $a_n < 0$

#

สรุปแนวคิดภาคขยายบางอย่างของแนวคิดลิมิต

1. สำหรับ $A \subseteq \mathbb{R}$ และให้ $f : A \to \mathbb{R}$

   1.1 ถ้า $c \in \mathbb{R}$ เป็นจุดลิมิตของเซต $A \cap (c, \infty) = \{x \in A \mid x > c\}$
   จะกล่าวว่า $L \in \mathbb{R}$ เป็นลิมิตทางขวาของ f ที่ c ก็ต่อเมื่อ แต่ละ $\varepsilon > 0$
   จะมี $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ที่ทำให้สำหรับทุก $x \in A$ ถ้า $0 < x - c < \delta$ แล้ว
   $|f(x) - L| < \varepsilon$
   เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x\to c^+} f = L$ หรือ $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = L$

   1.2 ถ้า $c \in \mathbb{R}$ เป็นจุดลิมิตของเซต $A \cap (-\infty, c) = \{x \in A \mid x < c\}$
   จะกล่าวว่า $L \in \mathbb{R}$ เป็นลิมิตทางซ้ายของ f ที่ c ก็ต่อเมื่อ แต่ละ $\varepsilon > 0$
   จะมี $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ที่ทำให้สำหรับทุก $x \in A$ ถ้า $0 < c - x < \delta$ แล้ว
   $|f(x) - L| < \varepsilon$
   เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x\to c^-} f = L$ หรือ $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = L$

2. ให้ $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ และ $c \in \mathbb{R}$ เป็นจุดลิมิตของเซต $A \cap (c, \infty)$
   ดังนั้น ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

   (1) $\lim\limits_{x\to c^+} f = L$

   (2) สำหรับแต่ละลำดับ (x_n) ลู่เข้าสู่ c โดยที่ $x_n \in A$ ที่ทำให้สำหรับทุกจำนวนธรรมชาติ n ถ้า $x_n > c$ แล้ว ลำดับ $(f(x_n))$ ลู่เข้าสู่ L

3. ให้ $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ และ $c \in \mathbb{R}$ เป็นจุดลิมิตของทั้งเซต
   $A \cap (c, \infty)$ และ $A \cap (-\infty, c)$
   ดังนั้น $\lim\limits_{x\to c} f = L$ ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{x\to c^+} f = L = \lim\limits_{x\to c^-} f$

4. สำหรับ $A \subseteq \mathbb{R}$ ให้ $f : A \to \mathbb{R}$ และ $c \in \mathbb{R}$ เป็นจุดลิมิตของ A

   4.1 f เข้าสู่ ∞ เมื่อ $x \to c$ ก็ต่อเมื่อ แต่ละ $\alpha > 0$ จะมี $\delta = \delta(\alpha) > 0$
   ที่ทำให้สำหรับทุก $x \in A$ ถ้า $0 < |x - c| < \delta$ แล้ว $f(x) > \alpha$
   เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x\to c} f = \infty$

4.2 f เข้าสู่ $-\infty$ เมื่อ $x \to c$ ก็ต่อเมื่อ แต่ละ $\beta < 0$ จะมี $\delta = \delta(\beta) > 0$ ที่ทำให้สำหรับทุก $x \in A$ ถ้า $0 < |x - c| < \delta$ แล้ว $f(x) < \beta$

เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x \to c} f = -\infty$

5. สำหรับ $A \subseteq \mathbb{R}$ ให้ $f, g : A \to \mathbb{R}$ และ $c \in \mathbb{R}$ เป็นจุดลิมิตของ A สมมุติว่า $f(x) \leq g(x)$ ทุก $x \in A, x \neq c$

5.1 ถ้า $\lim\limits_{x \to c} f = \infty$ แล้ว $\lim\limits_{x \to c} g = \infty$

5.2 ถ้า $\lim\limits_{x \to c} g = -\infty$ แล้ว $\lim\limits_{x \to c} f = -\infty$

6. สำหรับ $A \subseteq \mathbb{R}$ และ $f : A \to \mathbb{R}$

6.1 ถ้า $c \in \mathbb{R}$ เป็นจุดลิมิตของ $A \cap (c, \infty) = \{x \in A \mid x > c\}$

จะกล่าวว่า f เข้าสู่ ∞ เมื่อ $x \to c^+$ ก็ต่อเมื่อ แต่ละ $\alpha > 0$ จะมี $\delta = \delta(\alpha) > 0$ ที่ทำให้สำหรับทุก $x \in A$ ถ้า $0 < x - c < \delta$ แล้ว $f(x) > \alpha$

เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x \to c^+} f = \infty$

จะกล่าวว่า f เข้าสู่ $-\infty$ เมื่อ $x \to c^+$ ก็ต่อเมื่อ แต่ละ $\beta < 0$ จะมี $\delta = \delta(\beta) > 0$ ที่ทำให้สำหรับทุก $x \in A$ ถ้า $0 < x - c < \delta$ แล้ว $f(x) < \beta$

เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x \to c^+} f = -\infty$

6.2 ถ้า $c \in \mathbb{R}$ เป็นจุดลิมิตของ $A \cap (-\infty, c) = \{x \in A \mid x < c\}$

จะกล่าวว่า f เข้าสู่ ∞ เมื่อ $x \to c^-$ ก็ต่อเมื่อ แต่ละ $\alpha > 0$ จะมี $\delta = \delta(\alpha) > 0$ ที่ทำให้สำหรับทุก $x \in A$ ถ้า $0 < c - x < \delta$ แล้ว $f(x) > \alpha$

เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x \to c^-} f = \infty$

จะกล่าวว่า f เข้าสู่ $-\infty$ เมื่อ $x \to c^-$ ก็ต่อเมื่อ แต่ละ $\beta < 0$ จะมี $\delta = \delta(\beta) > 0$ ที่ทำให้สำหรับทุก $x \in A$ ถ้า $0 < c - x < \delta$ แล้ว $f(x) < \beta$

เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x \to c^-} f = -\infty$

7. สำหรับ $A \subseteq \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$ ให้ $f : A \to \mathbb{R}$

7.1 สำหรับ $(a, \infty) \subseteq A$ บาง $a \in \mathbb{R}$

L เป็นลิมิตของ f เมื่อ $x \to \infty$ ก็ต่อเมื่อ แต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $K = K(\varepsilon) > 0$ ที่ทำให้สำหรับทุก $x \in A$ ถ้า $x > K$ แล้ว $|f(x) - L| < \varepsilon$

เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x \to \infty} f = L$ หรือ $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$

7.2 สำหรับ $(-\infty, a) \subseteq A$ บาง $a \in \mathbb{R}$
L เป็นลิมิตของ f เมื่อ $x \to -\infty$ ก็ต่อเมื่อ แต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $K = K(\varepsilon) < 0$
ที่ทำให้สำหรับทุก $x \in A$ ถ้า $x < K$ แล้ว $|f(x) - L| < \varepsilon$
เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x \to -\infty} f = L$ หรือ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$

8. ให้ $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ และ $(a, \infty) \subseteq A$ บาง $a \in \mathbb{R}$
ดังนั้น ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน
(1) $\lim\limits_{x \to \infty} f = L$
(2) สำหรับแต่ละลำดับ (x_n) ใน (a, ∞) โดยที่ $\lim (x_n) = \infty$
แล้ว ลำดับ $(f(x_n))$ ลู่เข้าสู่ L

9. ให้ $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ และ $(-\infty, a) \subseteq A$ บาง $a \in \mathbb{R}$
ดังนั้น ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน
(1) $\lim\limits_{x \to -\infty} f = L$
(2) สำหรับแต่ละลำดับ (x_n) ใน $(-\infty, a)$ โดยที่ $\lim (x_n) = -\infty$
แล้ว ลำดับ $(f(x_n))$ ลู่เข้าสู่ L

10. สำหรับ $A \subseteq \mathbb{R}$ ให้ $f : A \to \mathbb{R}$ และ $(a, \infty) \subseteq A$ บาง $a \in \mathbb{R}$
10.1 f เข้าสู่ ∞ เมื่อ $x \to \infty$ ก็ต่อเมื่อ แต่ละ $\alpha > 0$ จะมี $K = K(\alpha) > 0$
ที่ทำให้สำหรับทุก $x \in A$ ถ้า $x > K$ แล้ว $f(x) > \alpha$ จะเขียน $\lim\limits_{x \to \infty} f = \infty$
10.2 f เข้าสู่ $-\infty$ เมื่อ $x \to \infty$ ก็ต่อเมื่อ แต่ละ $\beta < 0$ จะมี $K = K(\beta) > 0$
ที่ทำให้สำหรับทุก $x \in A$ ถ้า $x > K$ แล้ว $f(x) < \beta$ จะเขียน $\lim\limits_{x \to \infty} f = -\infty$

11. สำหรับ $A \subseteq \mathbb{R}$ ให้ $f : A \to \mathbb{R}$ และ $(-\infty, a) \subseteq A$ บาง $a \in \mathbb{R}$
11.1 f เข้าสู่ ∞ เมื่อ $x \to -\infty$ ก็ต่อเมื่อ แต่ละ $\alpha > 0$ จะมี $K = K(\alpha) < 0$
ที่ทำให้สำหรับทุก $x \in A$ ถ้า $x < K$ แล้ว $f(x) > \alpha$ จะเขียน $\lim\limits_{x \to -\infty} f = \infty$
11.2 f เข้าสู่ $-\infty$ เมื่อ $x \to -\infty$ ก็ต่อเมื่อ แต่ละ $\beta < 0$ จะมี $K = K(\beta) < 0$
ที่ทำให้สำหรับทุก $x \in A$ ถ้า $x < K$ แล้ว $f(x) < \beta$ จะเขียน $\lim\limits_{x \to -\infty} f = -\infty$

12. ให้ $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ และ $(a, \infty) \subseteq A$ บาง $a \in \mathbb{R}$
ดังนั้น ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน
(1) $\lim\limits_{x \to \infty} f = \infty$
(2) สำหรับแต่ละ (x_n) ใน (a, ∞) โดยที่ $\lim (x_n) = \infty$ แล้ว $\lim (f(x_n)) = \infty$

13. ให้ $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ และ $(a, \infty) \subseteq A$ บาง $a \in \mathbb{R}$
ดังนั้น ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน
(1) $\lim\limits_{x \to \infty} f = -\infty$
(2) สำหรับแต่ละ (x_n) ใน (a, ∞) โดยที่ $\lim(x_n) = \infty$ แล้ว $\lim(f(x_n)) = -\infty$

14. ให้ $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ และ $(-\infty, a) \subseteq A$ บาง $a \in \mathbb{R}$
ดังนั้น ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน
(1) $\lim\limits_{x \to -\infty} f = \infty$
(2) สำหรับแต่ละลำดับ (x_n) ใน $(-\infty, a)$ โดยที่ $\lim(x_n) = -\infty$ แล้ว $\lim(f(x_n)) = \infty$

15. สำหรับ $A \subseteq \mathbb{R}$ ให้ $f, g : A \to \mathbb{R}$ และ $(a, \infty) \subseteq A$ บาง $a \in \mathbb{R}$
สมมุติว่า $f(x) \le g(x)$ ทุก x ใน (a, ∞)
15.1 ถ้า $\lim\limits_{x \to \infty} f = \infty$ แล้ว $\lim\limits_{x \to \infty} g = \infty$
15.2 ถ้า $\lim\limits_{x \to \infty} g = -\infty$ แล้ว $\lim\limits_{x \to \infty} f = -\infty$

16. สำหรับ $A \subseteq \mathbb{R}$ ให้ $f, g : A \to \mathbb{R}$ และ $(-\infty, a) \subseteq A$ บาง $a \in \mathbb{R}$
สมมุติว่า $f(x) \le g(x)$ ทุก x ใน $(-\infty, a)$
16.1 ถ้า $\lim\limits_{x \to -\infty} f = \infty$ แล้ว $\lim\limits_{x \to -\infty} g = \infty$
16.2 ถ้า $\lim\limits_{x \to -\infty} g = -\infty$ แล้ว $\lim\limits_{x \to -\infty} f = -\infty$

17. สำหรับ $A \subseteq \mathbb{R}$ ให้ $f, g : A \to \mathbb{R}$ และ $(a, \infty) \subseteq A$ บาง $a \in \mathbb{R}$
สมมุติว่า $g(x) > 0$ ทุก $x > a$ และบาง $L \in \mathbb{R}$, $L \neq 0$
$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$
17.1 สำหรับ $L > 0$ ดังนั้น $\lim\limits_{x \to \infty} f = \infty$ ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{x \to \infty} g = \infty$
17.2 สำหรับ $L < 0$ ดังนั้น $\lim\limits_{x \to \infty} f = -\infty$ ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{x \to \infty} g = \infty$

18. สำหรับ $A \subseteq \mathbb{R}$ ให้ $f, g : A \to \mathbb{R}$ และ $(-\infty, a) \subseteq A$ บาง $a \in \mathbb{R}$
สมมุติว่า $g(x) > 0$ ทุก $x < a$ และบาง $L \in \mathbb{R}$, $L \neq 0$
$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$
18.1 สำหรับ $L > 0$ ดังนั้น $\lim\limits_{x \to -\infty} f = \infty$ ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{x \to -\infty} g = \infty$
18.2 สำหรับ $L < 0$ ดังนั้น $\lim\limits_{x \to -\infty} f = -\infty$ ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{x \to -\infty} g = \infty$

แบบฝึกหัด 6.3

1. ให้ $f(x) = |x|^{-\frac{1}{2}}$ สำหรับ $x \neq 0$ จงแสดงว่า $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$
2. ให้ $c \in \mathbb{R}$ และ f นิยามสำหรับ $x \in (c,\infty)$ และ $f(x) > 0$ ทุก $x \in (c,\infty)$ จงแสดงว่า $\lim_{x\to c} f = \infty$ ก็ต่อเมื่อ $\lim_{x\to c} \frac{1}{f} = 0$
3. ให้หาค่าลิมิต หรือแสดงว่าลิมิตไม่มีค่า

   3.1 $\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{x-1}$ $(x \neq 1)$

   3.2 $\lim_{x\to 1} \frac{x}{x-1}$ $(x \neq 1)$

   3.3 $\lim_{x\to 0^+} \frac{x+2}{\sqrt{x}}$ $(x > 0)$

   3.4 $\lim_{x\to \infty} \frac{x+2}{\sqrt{x}}$ $(x > 0)$

   3.5 $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}}{x}$ $(x > -1)$

   3.6 $\lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x}$ $(x > 0)$

   3.7 $\lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+3}$ $(x > 0)$

   3.8 $\lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}+x}$ $(x > 0)$
4. สมมุติ f และ g มีลิมิตใน $\mathbb{R}$ เมื่อ $x \to \infty$ และ $f(x) \le g(x)$ ทุก $x \in (a,\infty)$ จงพิสูจน์ว่า $\lim_{x\to\infty} f \le \lim_{x\to\infty} g$
5. ให้ $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ จงพิสูจน์ว่า $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ ก็ต่อเมื่อ $\lim_{x\to 0^+} f(\frac{1}{x}) = L$
6. จงแสดงว่า สำหรับ $f : (a,\infty) \to \mathbb{R}$ โดยที่ $\lim_{x\to\infty} x f(x) = L$ เมื่อ $L \in \mathbb{R}$ ดังนั้น $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$
7. สมมุติ $\lim_{x\to c} f(x) = L$ เมื่อ $L > 0$ และ $\lim_{x\to c} g(x) = \infty$ จงแสดงว่า (1) $\lim_{x\to c} f(x)g(x) = \infty$ (2) ถ้า $L = 0$ ให้ยกตัวอย่างว่าข้อสรุปไม่จริง
8. ให้ p เป็นฟังก์ชันพหุนามในตัวอย่าง6.3.5(3) จงแสดงว่า

   8.1 $\lim_{x\to -\infty} p = \infty$ ถ้า n เป็นเลขคู่ และ $a_n > 0$

   8.2 $\lim_{x\to -\infty} p = -\infty$ ถ้า n เป็นเลขคี่ และ $a_n > 0$